PHYSIQUE SORBONNE

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 gennaio 1923.

Presidenza del Socio anziano, R. Lanciani.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle radici primitive per moduli (ideali) composti nei corpi algebrici.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Si sa che per ogni ideale primo P, in qualunque corpo algebrico, $k(\theta)$, esistono radici primitive, appartenenti cioè all'esponente di Fermat $\Phi(P)$. Sembra però che la questione analoga per qualunque ideale A non sia stata fin qui risoluta. Anche nel caso generale, come nell'ordinaria aritmetica razionale, la ricerca si riduce essenzialmente all'esame del comportamento delle *potenze degli ideali primi* P.

Nelle seguenti pagine, imitando il noto procedimento d'aritmetica razionale (1), si risponde in modo esauriente alla questione mediante i quattro teoremi seguenti:

A) *Se un ideale primo* P *è di grado superiore al primo, nessuna potenza superiore di* P *ammette radici primitive.*

B) *Per ogni ideale primo* P *di primo grado tutte le potenze di* P *ammettono radici primitive, salvo nei due casi eccezionali seguenti:*

1°) *quando il numero primo razionale* $p = NP$, *coordinato all'ideale* P, *è dispari e divisibile per* P^2 (2),

2°) *quando sia* $p = 2$.

(1) Cfr. Dirichlet-Dedekind, *Zahlentheorie*, Supplemento V (Se 331-339, IVe Auflage) o pag. 326-334 traduzione italiana.

(2) In tal caso p è numero primo *critico* e divide il numero fondamentale D del corpo.

Rispetto al comportamento delle potenze di P nei due casi eccezionali, si hanno questi due teoremi:

C) *Se p è dispari e divisibile per* P^2, *ovvero quando è* $p = 2$, *e non divisibile per* P^2, *le potenze di* P, *a cominciare dalla* **terza**, *mancano di radici primitive (le hanno* P *e* P^2).

D) *Se è* $p = 2$ *ed è* 2 *divisibile per* P^2, *le potenze di* P, *a cominciare dalla* **quarta**, *mancano di radici primitive (le hanno* P, P^2 *e* P^3).

Come si vede, il caso eccezionale $p = 2$ dell'aritmetica razionale rientra nel teorema C); e lo stesso comportamento offrono i numeri primi critici e dispari per gli ideali primi P che vi entrano al quadrato. L'ulteriore eccezione per $p = 2$ (critico) del caso D) non ha riscontro nel campo razionale, ma si presenta subito, ad esempio, nel campo di Gauss per $P = 1 + i$.

2. Nel corpo algebrico $k(\theta)$, di grado $m > 1$, sia P un ideale primo, e sia p il suo numero primo razionale coordinato, talchè, per la norma NP di P, si abbia

$$\text{NP} = p^f, \tag{1}$$

denotando f il grado dell'ideale primo. Cominciamo dal dimostrare il seguente lemma:

α) *Se una potenza superiore* P^{n+1} di $P(n \geq 1)$ *possiede una radice primitiva* g, *questa è anche radice primitiva di tutte le potenze inferiori:* $P^n, P^{n-1} \ldots P$.

Basterà provare che g è anche radice primitiva di P^n, chè allora lo stesso avverrà per le seguenti potenze.

Sia δ l'esponente a cui appartiene g (mod. P^n), onde δ dividerà $\Phi(P^n)$, e, posto

$$g^\delta = 1 + \omega, \tag{2}$$

sarà ω un intero [di $k(\theta)$] divisibile per P^n. Elevando la (2) alla potenza p, risulta

$$g^{\delta p} = 1 + p\omega + \binom{p}{2}\omega^2 + \binom{p}{3}\omega^3 + \cdots,$$

e si osserva che a destra tutti i termini, dopo il primo, sono divisibili per P^{n+1}. Difatti $\omega^2, \omega^3 \ldots$ sono divisibili per $P^{2n}, P^{3n} \ldots$ ed è già $2n \geq n + 1$; ma anche il secondo termine $p\omega$ è divisibile per P^{n+1}, entrando P in p, e P^n in ω. Di qui segue la congruenza

$$g^{\delta p} \equiv 1 \pmod{P^{n+1}};$$

e siccome g è radice primitiva (mod. P^{n+1}), dovrà essere δp multiplo del numero

$$\Phi(P^{n+1}) = \text{NP} \cdot \Phi(P^n) = p^f \Phi(P^n)$$

e quindi δ multiplo di $p^{f-1}\Phi(P^n)$. Ma δ divide $\Phi(P^n)$, come si è detto; e perchè le due cose siano conciliabili, dovremo avere insieme

$$\delta = \Phi(P^n) \quad , \quad f = 1 .$$

La prima di queste eguaglianze dice che g è radice primitiva di P^n, e ne resta dimostrato il lemma α). La seconda, $f = 1$, insegna che l'ideale P deve essere di *primo grado*: ciò che prova il teorema A) n. 1.

3. Provato così che le potenze superiori di un ideale primo P *possono* avere radici primitive solo quando P è di 1° grado ($NP = p$), passiamo ad esaminare quello che accade effettivamente in questo caso.

Intanto, pel lemma α), se g è radice primitiva (mod. P^{n+1}), sarà pure radice primitiva (mod. P^n), e dotata inoltre della proprietà che la differenza

$$g^{\Phi(P^n)} - 1 ,$$

divisibile per P^n, non è però divisibile per P^{n+1} (altrimenti non sarebbe g radice primitiva rispetto a questo modulo).

Il risultato ora osservato si può in certo modo invertire (senza restrizioni) stabilendo questo secondo lemma:

β) *Se g è una radice primitiva* (mod. P^n) ($n \geq 1$), *dotata della proprietà che il numero* $g^{\Phi(P^n)} - 1$ *non sia divisibile per* P^{n+1}, *sarà anche g radice primitiva* (mod. P^{n+1}).

Pongasi infatti nuovamente

$$g^{\Phi(P^n)} = 1 + \omega , \tag{3}$$

e l'intero ω sarà divisibile per P^n, *ma non per* P^{n+1}. Ora l'esponente δ, a cui appartiene g (mod. P^{n+1}), divide $\Phi(P^{n+1}) = p\,\Phi(P^n)$ e d'altra parte è multiplo di $\Phi(P^n)$, essendo $g^\delta \equiv 1$ (mod. P^n) e g radice primitiva di P^n. Per conseguenza δ avrà o il valore $\Phi(P^n)$, o l'altro $\Phi(P^{n+1})$. Ma il primo caso è escluso da che, nella (3), ω non è divisibile per P^{n+1}; e concludiamo quindi che si ha $\delta = \Phi(P^{n+1})$, ossia che g è radice primitiva (mod. P^{n+1}), secondo quanto afferma il lemma β).

Ed ora nelle ipotesi di questo lemma introduciamo la seguente restrizione:

γ) *Il numero primo razionale p, coordinato a* P, *sia dispari e non divisibile per* P^2.

In tal caso possiamo vieppiù precisare il lemma β) nell'altro:

β') *Sotto la restrizione γ), la radice primitiva g* (mod. P^{n+1}) *sarà dotata dell'analoga proprietà: che il numero* $g^{\Phi(P^{n+1})} - 1$, *divisibile per* P^{n+1}, *non è però divisibile per* P^{n+2}.

Per dimostrarlo eleviamo nuovamente la (3) alla potenza p ed avremo:

$$g^{\Phi(P^{n+1})} = 1 + p\omega + \frac{p-1}{2} p\omega^2 + \binom{p}{3} \omega^3 + \cdots \tag{4}$$

Qui i termini a destra, da ω^3 in poi, sono divisibili per P^{3n}, indi per P^{n+2} a causa di $3n \geq n+2$; ma lo stesso avviene del termine precedente $\frac{p-1}{2} p\omega^2$, perchè $\frac{p-1}{2}$ è intero, p è divisibile per P e ω^2 per P^{2n}, indi $p\omega^2$ per P^{2n+1}, mentre $2n+1 \geq n+2$. Invece nel secondo termine $p\omega$ a destra, nella (4), come più alta potenza di P entra la P^{n+1}, entrando P in p solo alla prima potenza per la restrizione γ), ed in ω esattamente alla potenza P^n. Se ne deduce dunque in effetto che la differenza $g^{\Phi(P^{n+1})} - 1$, divisibile per P^{n+1}, non è però divisibile per P^{n+2}, ed anche il lemma β') è dimostrato.

È ora evidente come dalla ripetuta applicazione dei lemmi β) β'), nelle ammesse ipotesi e con la restrizione γ), risulta:

La radice primitiva g (mod. P^n) *è anche radice primitiva di tutte le potenze superiori di* P.

4. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema B) del n. 1, nel cui enunciato è già ammessa la restrizione γ) del numero precedente.

Pei risultati sopra esposti basterà accertare l'esistenza di radici primitive g del modulo P, tali che la differenza

$$g^{\Phi(P)} - 1 = g^{p-1} - 1,$$

o, ciò che è lo stesso, l'altra $g^p - g$, certamente divisibile per P, non sia però divisibile per P^2. Una tale g sarà infatti, per quanto precede, radice primitiva di tutte le potenze superiori di P.

Allo scopo prendiamo una qualunque radice primitiva γ (mod. P), e poniamo

$$g = \gamma + \omega, \tag{5}$$

con ω, intero in $k(\theta)$, divisibile per P *e, del resto, arbitrario*. Sarà sempre g radice primitiva (mod. P) e, disponendo di ω, potremo facilmente conseguire che la differenza $g^p - g$ non sia divisibile per P^2, che è quanto occorre. Dalla (5), elevata a p, si trae infatti

$$g^p = \gamma^p + p\omega\gamma^{p-1} + \binom{p}{2} \omega^2 \gamma^{p-2} + \cdots;$$

e poichè tutti i termini a destra, dopo il primo, sono divisibili per P^2, ne segue la congruenza

$$g^p \equiv \gamma^p \pmod{P^2},$$

dalla quale, sottraendo la (5), si ha l'altra

$$g^p - g \equiv (\gamma^p - \gamma) - \omega \pmod{P^2}. \tag{6}$$

Ora, se la differenza $\gamma^p - \gamma$ non è divisibile per P^2, abbiamo già in γ una radice primitiva (mod. P) dotata della proprietà richiesta [si farà allora $\omega = 0$ ovvero $\omega \equiv 0 \pmod{P^2}$].

Se invece $\gamma^p - \gamma \equiv 0 \pmod{P^2}$, si prenda nella (6) il numero ω divisibile bensì per P *ma non per* P^2, e la radice primitiva g (mod. P), data dalla (5), avrà la proprietà voluta. Così il teorema B) del n. 1 è completamente dimostrato.

Si osservi ancora che, in questa dimostrazione dell'esistenza di radici primitive g (mod. P), con la proprietà che $g^{p-1} - 1$ non sia divisibile per P^2, *non è occorsa la restrizione* γ); e allora, pel lemma β) n. 3, una tale g è anche radice primitiva (mod. P^2). Vale dunque in ogni caso il teorema:

E) *La seconda potenza di un qualunque ideale primo di primo grado ammette sempre radici primitive.*

5. Venendo ai casi eccezionali, per provare il teorema C) del n. 1, dimostriamo successivamente:

1°) *Se p è dispari e divisibile per* P^2, *già la terza potenza* P^3 *non ha radici primitive.* Allora, pel lemma α) n. 2, è certo che anche tutte le potenze superiori di P mancano di radici primitive, ed hanno invece, pel teorema E), radici primitive P^2 e P. Così sarà provato il teorema C) per p dispari.

Suppongasi, al contrario, g radice primitiva (mod. P^3), e per ciò anche di P^2, P. Posto

$$g^{\Phi(P)} = 1 + \omega ,$$

sarà ω divisibile per P (non per P^2), ed, elevando a p, avremo

$$g^{\Phi(P^2)} = 1 + p\omega + \frac{p-1}{2} p\omega^2 + \cdots$$

Qui i termini a destra, dal terzo in poi, sono divisibili per P^3, ed anche il secondo $p\omega$ è divisibile per P^3, entrando P^2 in p e P in ω; ne segue la congruenza

$$g^{\Phi(P^2)} \equiv 1 \pmod{P^3}.$$

Dunque l'esponente a cui appartiene g (mod. P^3) è un divisore di $\Phi(P^2)$, in contraddizione coll'ipotesi che g sia radice primitiva (mod. P^3). Similmente, per la seconda ipotesi nel teorema C), dimostriamo:

2°) *Se $p = 2$, e non è divisibile per* P^2, *manca già di radici primitive la terza potenza* P^3.

Si ammetta al solito, invece, l'esistenza di una tale radice primitiva g. Siccome $\Phi(P^2) = 2$, e i numeri 1, 3 sono primi con P^2 ed incongrui perchè $3 - 1 = 2$ non è divisibile per P^2, nè può essere $g \equiv 1 \pmod{P^2}$, sarà $g \equiv 3 \pmod{P^2}$, ossia

$$g = 3 + \omega \quad , \quad \omega \equiv 0 \pmod{P^2}.$$

Elevando al quadrato, risulta

$$g^2 - 1 = g^{\Phi(P^2)} - 1 = 8 + 6\omega + \omega^2,$$

e i tre termini a destra $8, 6\omega, \omega^2$ sono tutti divisibili per P^3.

Si ha dunque, come sopra,

$$g^{\Phi(P^2)} \equiv 1 \pmod{P^3},$$

congruenza inconciliabile coll'ipotesi di g radice primitiva (mod. P^3).

Così è dimostrato il teorema C).

6. Da ultimo dimostriamo il teorema D) provando che:

Se $p = 2$ ed è 2 divisibile per P^2, già la quarta potenza di P manca di radici primitive, che esistono invece per P^3 (e per P^2, P).

Per la prima parte si osservi che, se g è un qualunque numero non divisibile per P, si ha

$$g^{\Phi(P^2)} = 1 + \omega \quad , \quad \text{con } \omega \equiv 0 \pmod{P^2},$$

e, elevando al quadrato,

$$g^{\Phi(P^3)} = 1 + 2\omega + \omega^2.$$

Per le nostre ipotesi, 2ω e ω^2 sono divisibili per P^4 e vale dunque, *per qualunque* g, la congruenza

$$g^{\Phi(P^3)} \equiv 1 \pmod{P^4},$$

ciò che esclude l'esistenza di radici primitive (mod. P^4).

Invece, per la terza potenza P^3 riconosciamo l'esistenza di radici primitive come segue: Poniamo

$$g = 1 + \omega$$

con ω divisibile per P, ma non per P^2, e sarà g radice primitiva (mod. P^2). Ma si ha

$$g^2 - 1 = g^{\Phi(P^2)} - 1 = 2\omega + \omega^2,$$

ed è 2ω divisibile per P^3, ed ω^2 per P^2 soltanto, onde $g^{\Phi(P^2)} - 1$ non è divisibile per P^3. E allora questa g, pel lemma β) n. 3, è anche radice primitiva (mod. P^3), c. d. d.

Osserviamo in fine che il problema qui risolto riguarda i casi in cui il gruppo Abeliano formato dalle sostituzioni lineari

$$x' \equiv ax \pmod{P^n},$$

dove a percorre i $\Phi(P^n)$ moltiplicatori primi con P^n, è un gruppo ciclico. La questione si può generalizzare alla ricerca della *base* del gruppo Abeliano

$$x' \equiv ax \pmod{A}$$

per un ideale A, comunque composto.

Fisica. — *Sull'orientamento dei granuli magnetici nelle sospensioni colloidali per effetto di campi alternati o rotanti.* Nota del Socio O. M. Corbino.

I fenomeni di birifrangenza magnetica osservati dal Majorana con le soluzioni colloidali di idrato di ferro (ferro Bravais) sono attribuibili, come è noto, all'orientamento che subiscono nel campo le particelle sospese. Tale orientamento non è completo, a causa del movimento browniano che tende a dirigere gli assi delle particelle in tutte le direzioni possibili; il campo esterno riesce solo, perciò, a perturbare rispetto a una direzione la uniformità che tenderebbe a stabilire l'agitazione termica; ed è perciò che la birifrangenza cresce al crescere della intensità del campo, o al diminuire della temperatura.

Ne risultano degli effetti di ritardo qualora il campo sia applicato o soppresso bruscamente, ovvero varii periodicamente di intensità, come avviene se esso è prodotto da correnti alternate. Ma data la piccolezza estrema delle particelle, tali effetti di ritardo si manifestano solo, come risulta da ricerche del Dr. Tieri, e mie, quando è estremamente rapida la variazione del campo. Così fu trovato che solo con liquidi molto invecchiati, a birifrangenza positiva, si hanno effetti di ritardo nei campi prodotti con correnti oscillatorie di scariche di condensatori, mentre essi non sono rilevabili interrompendo periodicamente la corrente alimentatrice del campo con l'interruttore di Wehnelt (1). Io ne dedussi che le particelle devono avere dimensioni piccolissime, corrispondenti quasi al limite della visibilità ultramicroscopica.

Mi propongo in questa Nota di esaminare altri effetti dovuti al ritardo di orientamento delle particelle nei campi variabili; dimostrando che la polarizzazione magnetica del liquido in un campo alternato varia periodicamente con uno spostamento di fase rispetto al campo; e che se questo è un campo rotante Ferraris la polarizzazione magnetica è anch'essa rotante, ma con uno spostamento angolare sul campo; donde ha origine un' azione meccanica di trascinamento della massa liquida.

L'esperienza conferma l'esistenza di tale azione meccanica esercitantesi sul liquido, indipendentemente dalla sua parziale conducibilità elettrolitica e dalle conseguenti azioni elettro-magnetiche.

(1) Corbino, Rend. Lincei, vol. XIX, 1° sem., p. 743; 1910.

Le forze previste sono in relazione semplice con alcune costanti caratteristiche delle particelle e del liquido, e con le dimensioni di quelle; cosicchè la determinazione sperimentale delle forze medesime può dare delle informazioni notevoli sulle qualità delle particelle sospese.

* * *

La teoria dell'orientamento di piccole particelle sotto l'azione combinata di un campo costante e dell'agitazione termica fu esposta per la prima volta dal Langevin, che ne trasse la spiegazione di alcuni effetti ottici dovuti al campo. Volendo studiare il caso dei campi variabili seguirò un'altra via, che mi sembra anche più intuitiva e che fu già prospettata in un mio precedente lavoro (1). Sotto l'azione d'una forza orientatrice esterna, agente su ciascuna particella, si produce una perturbazione nella distribuzione di queste che sarebbe assolutamente uniforme, in tutte le direzioni, per effetto della agitazione termica. La perturbazione cessa al cessare della forza; e perciò l'agitazione termica può considerarsi come l'origine di una forza antagonista, o pseudo-elastica, che impedisce alle particelle di obbedire alle forze esterne.

Se la concentrazione c delle particelle riferita a un parametro α varia con α, mentre sarebbe indifferente senza una forza esterna, allora la forza quasi elastica, di origine termica, che tende a ristabilire l'uniformità e che agisce su ciascuna particella è data, nel senso $d\alpha$, da

$$F = -\frac{RT}{N}\frac{d \log c}{d\alpha}$$

dove R è la costante dei gas ed N il numero di Avogadro, riferiti entrambi allo stesso volume, e T la temperatura assoluta.

Si immagini che le particelle abbiano un momento magnetico naturale (caso del paramagnetismo) secondo un asse che formi, per ciascuna particella, un angolo α col campo. In assenza del campo se si riportano intorno a un punto tutte le direzioni istantanee delle particelle contenute nell'unità di volume, si troverà una distribuzione uniforme; e sulla sfera di raggio 1 che circonda il punto le tracce degli assi avranno densità uniforme. Sia c il numero di queste tracce per unità di superficie della sfera; il numero totale n di particelle per unità di volume sarà $4\pi c$. Se si assume per definire l'orientazione delle particelle l'angolo α che l'asse di ciascuna forma con la direzione del campo, il numero di particelle il cui asse fa col campo un angolo compreso fra α e $\alpha + d\alpha$ sarà dato, come è evidente, da

$$c \cdot 2\pi \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha .$$

(1) Corbino, N. Cim., vol. XX, luglio 1910.

Se il campo è variabile questo numero è anch'esso variabile, e il suo aumento nel tempo dt sarà

$$(2) \qquad \frac{\partial c}{\partial t} \cdot 2\pi \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha \, dt \, .$$

Questo aumento, o più in generale questa variazione, dipende da ciò che la forza orientatrice esercitantesi sulle particelle suddette non è compensata, come in regime statico di equilibrio, dalla forza quasi elastica. È appunto per la differenza di queste coppie F e Π, che agisce sulla particella in un mezzo che offre loro la resistenza di attrito r, passa nel tempo dt attraverso alla superficie conica di angolo α tra la generatrice e l'asse un numero di particelle

$$\frac{F - \Pi}{r} \cdot c \cdot 2\pi \operatorname{sen} \alpha \, dt$$

mentre esce dalla superficie conica di angolo $\alpha + d\alpha$ il numero

$$\frac{F - \Pi}{r} 2\pi \operatorname{sen} (\alpha + d\alpha) \, dt$$

dove però anche $F - \Pi$ va considerata in relazione all'angolo $\alpha + d\alpha$.

Ma si ha, per la (1), ponendo $p = \frac{RT}{N}$

$$F = - p \frac{1}{c} \frac{dc}{d\alpha} \, .$$

D'altra parte indicando con A il momento magnetico della particella, e con

$$H = H_o \operatorname{sen} \omega t$$

il valore del campo alternato, sarà

$$\Pi = A \operatorname{sen} \alpha H = A H_o \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \omega t \, .$$

Pertanto l'aumento nel numero delle particelle orientate tra le due superficie sferiche sarà

$$\left| \frac{F - \Pi}{r} c \cdot 2\pi \operatorname{sen} \alpha \, dt \right|_{\alpha}^{\alpha + d\alpha} = \frac{2\pi}{r} dt \left| (F - \Pi) \, c \operatorname{sen} \alpha \right|_{\alpha}^{\alpha + d\alpha}$$

$$= \frac{2\pi}{r} dt \left[\operatorname{sen} \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} + p \frac{\partial c}{\partial \alpha} \cos \alpha + A H_o \operatorname{sen} \omega t \left(c \operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \frac{\partial c}{\partial \alpha} \right) \right] d\alpha \, .$$

Eguagliando con la (2), che dà un'altra misura dell'aumento nel tempo dt si ha, dopo aver posto

$$h = \frac{p}{r} = \frac{RT}{rN},$$

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = h\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} + \left(h \operatorname{cotg}\alpha + \frac{AH_o}{r}\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega t\right)\frac{\partial c}{\partial \alpha} + \frac{2AH_o}{r} c \cos\alpha \operatorname{sen}\omega t .$$

Si ponga

$$(4) \quad c = M[1 + a\cos\alpha \operatorname{sen}(\omega t - \delta)];$$

si può allora verificare che per tutti i casi in cui, per effetto del campo, la perturbazione negli orientamenti è piccolissima, (ciò che in realtà si verifica, come è dimostrato dal valore costante della suscettività magnetica del liquido), ed è perciò a molto piccolo rispetto all'unità, questo valore di c soddisfa l'equazione (3), qualora si abbia

$$a = \frac{2AH_o}{r\omega}\operatorname{sen}\delta$$

e

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\omega}{2h}.$$

0 anche ponendo (fig. 1)

$$\varepsilon = \sqrt{4h^2 + \omega^2},$$

sarà

$$a = \frac{2AH_o}{r\varepsilon}.$$

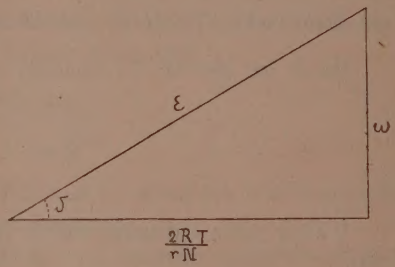

Fig. 1.

Si riconosce dalla (4) che la concentrazione riferita ai vari orientamenti α risulta formata da una parte costante, e da un'altra, piccolissima, che varia sinusoidalmente come il campo esterno, ma con un ritardo di fase δ rispetto ad esso.

Alla nuova distribuzione degli assi delle particelle corrisponde una polarizzazione magnetica del liquido, facilmente calcolabile.

Invero il momento della particella nel senso del campo sarà $A\cos\alpha$; e poichè fra le due superfici coniche α, e $\alpha + d\alpha$ considerate sopra sono contenute, per unità di volume, $2\pi c \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha$ particelle, ne risulta un momento per unità di volume dato da

$$2\pi A \int_o^\pi c \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, d\alpha .$$

Riferendoci alla parte di c che varia con α e che sola fornisce un momento totale diverso da zero, si ottiene come valore della polarizzazione P:

$$P = 2\pi AM a \operatorname{sen}(\omega t - \delta) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\alpha \cos^2\alpha \, d\alpha .$$

E poichè il numero totale n delle particelle per unità di volume è dato da $4\pi M$, si ha infine

$$P = \frac{2}{3} n A^2 H_0 \frac{1}{\varepsilon r} \operatorname{sen}(\omega t - \delta) .$$

Ciò significa che la polarizzazione magnetica varia sinusoidalmente come il campo, con uno spostamento di fase δ rispetto a questo.

Se adesso si immagina che un altro campo alternativo agisca perpendicolarmente al primo, e con uno sfasamento di 90° rispetto ad esso, si determinerà una nuova polarizzazione P', nel senso normale alla prima, e data da

$$P' = \frac{2}{3} n H A^2 \frac{1}{\varepsilon r} \cos(\omega t - \delta) .$$

Questa, composta con la P, dà una polarizzazione P_r rotante come il campo magnetico, e con ritardo angolare δ su di esso. Ne risulta un'azione meccanica fra il campo e la sostanza magnetizzata; il valore della coppia per unità di volume sarà dato da

$$D = H_0 P_r \operatorname{sen}\delta$$

e poichè

$$P_r = \sqrt{P^2 + P'^2} = \frac{2}{3} n H_0 A^2 \frac{1}{\varepsilon r}$$

avremo

$$D = \frac{2}{3} n H_0^2 A^2 \frac{1}{\varepsilon r} \operatorname{sen}\delta$$

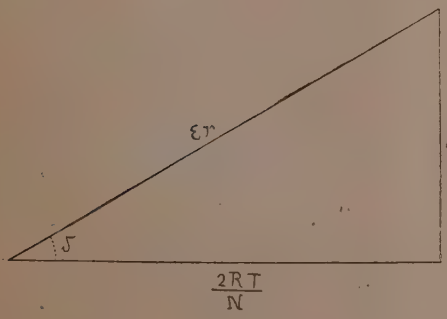

Fig. 2.

o anche, poichè εr è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti ωr e $2\frac{R}{N}T$, con l'angolo δ opposto al cateto ωr, sarà

$$D = \frac{2}{3} \frac{n H_0^2 A^2}{2\frac{R}{N}T} \operatorname{sen}\delta \cos\delta .$$

Una coppia di natura analoga e avente il medesimo valore è stata prevista da M. Born (1) per il caso di un dielettrico costituito da molecole che siano dipoli elettrici e disposto in un campo elettrostatico rotante.

E le esperienze eseguite da P. Lertes (2) che hanno messo in evidenza e misurate queste azioni di trascinamento esercitate da un campo rotante di alta frequenza su vari liquidi isolanti, hanno permesso di determinare il valore del momento A del dipolo elettrico molecolare, confermandosi l'ordine di grandezza dedotto con altri procedimenti.

Nel nostro caso non è necessario un campo magnetico di così alta frequenza come quelli sperimentati dal Lertes. Già un campo rotante ricavato da correnti di frequenza industriale basta a determinare misurabili azioni meccaniche di trascinamento sul ferro Bravais, come sarà esposto in una prossima Nota.

Meccanica. — *Sull'impiego dell'elio nei dirigibili* (3). Nota del Corrisp. G. Arturo Crocco.

La questione dell'elio può oggi porsi nel modo seguente.

Il censimento dei pozzi americani ha dato un gettito complessivo di questo gas pari a 30.000 metri cubi al giorno, di cui circa un terzo di agevole collezione mediante una spesa d'impianto di circa 70 milioni di dollari.

Ammortizzando tale spesa per la durata media dei pozzi, presunta in venti anni, e aggiungendovi le spese di produzione, si ottiene per l'elio compresso un costo minimo di circa 2 dollari per m^3.; in relazione ad una probabile produzione annua di *tre* milioni di metri cubi.

Prescindendo dalle applicazioni militari, i cui bisogni non dipendono da valutazioni economiche, è conveniente nelle applicazioni civili sostituire l'elio all'idrogeno, il cui costo è 15 volte minore e la cui disponibilità è indefinita?

Valutiamo perciò il consumo annuo di una aeronave; e in conseguenza il totale tonnellaggio di aeronavi che con la limitata disponibilità americana può tenersi in esercizio.

Il consumo di gas di un'aeronave è dovuto: *a*) alla diffusione osmotica; *b*) ai lavaggi necessarî per mantenere una determinata purezza: *c*) ai consumi di navigazione.

(1) M. Born, Z. S. für Phys, *1*, p. 222; 1920.
(2) P. Lertes, Z. S. för Phys, *6*, p. 56; 1921.
(3) Comunicazione fatta nella seduta del 3 giugno 1922.

Di queste tre cause, nell'attuale stato della tecnica e della pratica, la più importante è la terza: che assumerebbe poi valori rilevantissimi in un regolare traffico commerciale.

Consumi di navigazione. — Nel fatto un'aeronave non interamente piena che si mantenga sempre in equilibrio termico con l'aria ambiente, conserva a qualsiasi quota inalterata la sua forza sostentatrice, e perciò si alleggerisce nel suo cammino di tanto quanto è il peso del combustibile consumato.

Essa è quindi *teoricamente* obbligata a perdere durante il viaggio tanto gas quanto corrisponde a tale alleggerimento: ossia, in cifra tonda, un metro cubo di gas per ogni chilo di combustibile bruciato.

Praticamente intervengono varî fattori, prevedibili e non prevedibili, ad alterare la semplicità di questa regola: e cioè squilibrii alla partenza, variazioni di temperatura tra aria e gas dovute a variazioni dell'irradiazione solare, depositi estranei sull'involucro, sostentamento dinamico, squilibrii all'arrivo: tanto che un abile pilota, scegliendo opportunamente i tempi e le manovre, e sapendo sfruttare le circostanze meteorologiche, può compiere eccezionali viaggi senza il minimo spreco di gas. Ma queste abilità personali nulla tolgono alla generalità della regola suddetta, soprattutto in un servizio commerciale regolare, ad orario itinerario e quota di navigazione mediamente determinate.

Ora se appunto si calcolano i consumi, in base alla regola del metro cubo per chilo, per lunghi viaggi e traffico annuo intensivo (p. es. quattromila ore), si trova che un'aeronave di media cubatura intorno ai 100,000 m^3., provvista di circa 3600 HP e navigante a $^1/_2$ forza con consumo orario medio di Kg. 500, consumerebbe in un anno 2,000,000 m^3. di gas: ossia *venti* volte il suo volume. Cosicchè quasi tutta la produzione di elio americano sarebbe assorbita dai rifornimenti di una sola elionave: e il suo costo si eleverebbe a cifre proibitive.

Del resto anche adoperando idrogeno questi consumi sarebbero eccessivi: e d'altra parte una pratica autonomia nei dirigibili non si potrà mai avere, finchè non si eliminerà il vincolo dei rifornimenti di gas, mediante la integrale compensazione dei consumi di combustibile in navigazione.

Per buona ventura questa compensazione può dirsi risoluta in principio nella generalità dei casi probabili in pratica, come ci riserviamo di esporre in una successiva Nota: onde delle tre cause alle quali si deve il rifornimento di gas di un'aeronave la più grave deve ritenersi eliminabile totalmente.

Rimangono le altre due, che passiamo ad esaminare.

Diffusione osmotica. — Sebbene non si abbiano ancora numerosi dati sulla perdita osmotica dell'elio nei varî tessuti aeronautici, gli esperimenti sin qui compiuti hanno riscontrato a parità di strato impermeabile una diffu-

sione di poco più che la *metà* di quella dell'idrogeno. Esperienze compiute all'Istituto Aeronautico di Roma (1) su stoffe gommate italiane con peso p di gomma tra 80 e 160 grammi per metro quadrato darebbero, con molta approssimazione, a temperatura ordinaria, una media perdita di pari a $\frac{520}{p}$ litri nelle ventiquattro ore (le stesse esperienze darebbero per l'idrogeno una media perdita di $\frac{1000}{p}$ litri nelle ventiquattro ore).

Esperienze americane anteriori (2) sull'idrogeno non sembrano verificare la legge della proporzionalità inversa al peso p; e rivelano inoltre un elevato fattore di temperatura. Ma esse dimostrano per contro la possibilità di perdite assai minori, anche per elevate temperature, con impermeabilizzazioni di tipo speciale.

Cosicchè non appare esagerato ammettere per ora una perdita in ragione di *tre* litri per metro quadrato nelle 24 ore, relativa ai tessuti di prevedibile impiego per un involucro della capacità innanzi considerata, anche nella ipotesi che colla necessità si affinerà di molto la tecnica della impermealizzazione dei tessuti.

Con questa cifra il dirigibile sovracitato la cui superficie disperdente ascende a 18,000 m^2., perderebbe annualmente per osmosi 19440 m^3 di gas ossia meno del 20 % del suo volume.

E per volumi maggiori si avrebbero perdite relative anche minori a causa non solo del minor rapporto tra superficie e volume (3), ma anche pel maggior peso unitario di sostanza impermeabilizzante.

Rifornimento di lavaggio. — Attualmente i rinnovamenti di gas dovuti ai consumi di navigazione sono sufficienti a mantenere nell'involucro una sufficiente purezza. Ma, soppressi questi rinnovamenti, il *lavaggio* del gas diviene una necessità giornaliera di maggiore importanza della perdita osmotica. Nel fatto per ogni metro cubo di elio uscente per osmosi penetrano nell'involucro circa 400 litri di aria, che bisogna togliere se si vuol mantenere un grado di purezza costante. Se α è questo grado medio di purezza ed ω la perdita osmotica percentuale nell'unità di tempo, per togliere la corrispondente quantità d'aria, $0{,}4\,\omega$, occorrerà sostituire nell'unità di tempo un volume percentuale d'elio impuro pari a $\frac{0{,}4\,\omega}{1-\alpha}$ con altrettanto d'elio puro.

Così ad esempio volendo mantenere una purezza α del 96 % con la perdita osmotica annua del 20 % anzi calcolata, occorrerà un lavaggio annuo pari al *doppio* del volume del dirigibile.

(1) Gallo, *L'elio in aeronautica*, Rend. dell'I. A., n. I, del 1° febbraio 1921.
(2) Nat. Adv. Comm. f. A, del 1915. Report n. 6.
(3) Vedi questi Rendiconti, fasc. 10° del 1922.

Per buona ventura anche questa notevole causa di consumo si può totalmente eliminare, mediante la rigenerazione o ripurificazione dell'elio; estraendo cioè l'aria, che lo inquina, mediante raffreddamento e conseguente liquefazione. In America son già in servizio impianti purificatori montati su carri ferroviarî. Ma in navigazione civile basteranno impianti fissi di potenzialità oraria limitata, integrati da un doppio serbatoio di rifornimento. Il lavaggio si compie allora, periodicamente, coll'elio già purificato, mentre quello impuro che si estrae viene poi purificato nell'intervallo di tempo.

Riassumendo delle tre cause di rifornimento dell'elio che abbiamo esaminate e cioè consumi di navigazione, lavaggio e perdita osmotica, le quali stanno tra loro nei rapporti 100, 10, 1, soltanto la perdita osmotica rimane ineluttabile, in ragione media annua del 20 % del volume di rifornimento. Ciò ha due conseguenze fondamentali.

La prima che, ridotto a questa unica causa la necessità del rifornimento, la disponibilità dell'elio americano diviene capace di intrattenere, non già una sola, ma centocinquanta aeronavi della cubatura media indicata, e cioè un tonnellaggio complessivo di 15 milioni di metri cubi, sufficiente a una flotta aerea civile mondiale.

La seconda che il costo dell'elio diviene accessibile all'economia della navigazione, poichè oltre al volume occorrente al gonfiamento basta un rifornimento annuo nella massima misura del 20 %: o in altri termini che il gas originario di gonfiamento si esaurisce in un tempo minimo di cinque anni.

L'elio, così inteso, non è più un materiale di consumo, ma un materiale da costruzione il cui *capitale di impianto è ammortizzabile in cinque anni*: e perciò la sua sostituzione all'idrogeno nelle imprese civili diviene possibile e conveniente.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Algoritmo del massimo comun divisore nel corpo delle radici quinte dell'unità.* Nota della signorina GEMMA BRANCHINI [1], presentata dal Socio L. BIANCHI.

Vogliamo stabilire che per gli interi di questo corpo sussiste un algoritmo analogo a quello delle successive divisioni.

Siano μ, ν due interi qualunque del corpo e sia per es. $N(\mu) \geq N(\nu)$. Formiamo il loro quoziente $\frac{\mu}{\nu}$ che potrà, in innumerevoli modi, essere posto sotto la forma:

$$\frac{\mu}{\nu} = A + \alpha , \tag{1}$$

dove A indica un intero ed α un numero che in generale sarà fratto. Si avrà allora:

$$\mu = A\nu + \alpha\nu ,$$

e ponendo

$$\alpha\nu = R$$
$$\mu = A\nu + R ,$$

con R intero. Si tratta di dimostrare che è sempre possibile fare la decomposizione (1) in modo che risulti $N(\alpha) < 1$, cioè $N(R) < N(\nu)$, purchè ove occorra si sostituisca a μ un intero associato. Possiamo subito osservare che se

$$\frac{\mu}{\nu} = \bar{a}\varepsilon + \bar{b}\varepsilon^{-1} + \bar{c}\varepsilon^{2} + \bar{d}\varepsilon^{-2} ,$$

si potranno estrarre dai numeri razionali $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ le parti intere in modo che le residue parti fratte a, b, c, d siano positive o negative, ma in valore assoluto $\leq \frac{1}{2}$, in modo che risulti $\frac{\mu}{\nu} = A + \alpha$, dove A è un intero ed è $\alpha = a\varepsilon + b\varepsilon^{-1} + c\varepsilon^{2} + d\varepsilon^{-2}$ con $|a|, |b|, |c|, |d| \leq \frac{1}{2}$.

[1] Dell'algoritmo Euclideo per gli interi formati con la radice quinta dell'unità si trova traccia nel *Nachlass* di Gauss (Werke Bd. II. Zur Theorie der complexen Zahlen, S. 391-395). Ved. le annesse *Bemerkungen* di Schering. Il semplice procedimento qui esposto è stato presentato dalla signorina Branchini nella sua tesi di laurea. (L. B).

In ciò che segue supponiamo che α sia preso in modo da soddisfare a questa condizione. Evidentemente:

$$\alpha\varepsilon = a\varepsilon^2 + b + c\varepsilon^{-2} + d\varepsilon^{-1} = -b\varepsilon + (d-b)\varepsilon^{-1} + (a-b)\varepsilon^2 + (c-b)\varepsilon^{-2}$$
$$\alpha\varepsilon^2 = a\varepsilon^{-2} + b\varepsilon + c\varepsilon^{-1} + d = (b-d)\varepsilon + (c-d)\varepsilon^{-1} - d\varepsilon^2 + (a-d)\varepsilon^{-2}$$
$$\alpha\varepsilon^{-1} = a + b\varepsilon^{-2} + c\varepsilon + d\varepsilon^2 = (c-a)\varepsilon - a\varepsilon^{-1} + (d-a)\varepsilon^2 + (b-a)\varepsilon^{-2}$$
$$\alpha\varepsilon^{-2} = a\varepsilon^{-1} + b\varepsilon^2 + c + d\varepsilon = (d-c)\varepsilon + (a-c)\varepsilon^{-1} + (b-c)\varepsilon^2 - c\varepsilon^{-2}.$$

Facciamo le seguenti osservazioni:

1°) Si possono aumentare o diminuire (separatamente) le coordinate a, b, c, d di α di 1, pur di mutare convenientemente A con l'aggiunta di $\pm \varepsilon^u (u = 1, 2, 3, 4)$.

2°) Si può ad α sostituire αE, essendo E un'unità, pur di cambiare A in AE e μ in μE.

Calcoliamo:

$$N(\alpha) = \alpha \cdot s^2\alpha \cdot s\alpha \cdot s^3\alpha = P \cdot \overline{P}$$

dove

$$P = \alpha \cdot s^2 \cdot \alpha \quad , \quad \overline{P} = s\alpha \cdot s^3\alpha \ (^1).$$

Si trova subito:

$$P = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ad - bc) + (ac + bd + cd - ab - ad - bc)\eta$$
$$\overline{P} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ad - bc) + (ac + bd + cd - ab - ad - bc)\overline{\eta},$$

e ne ricaviamo:

$$P + \overline{P} = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ad - bc) + (ac + bd + cd - ab - ad - bc)(\eta + \overline{\eta}) =$$

[dove $\eta = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$, $\overline{\eta} = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}$]

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ad - bc) - ac - bd - cd + ab + ad + bc =$$
$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - ab - ad - bc - ac - bd - cd;$$

quindi:

$$2(P + \overline{P}) = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2ab - 2ad - 2bc - 2ac - 2bd - 2cd =$$
$$= 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)^2 \quad (^2).$$

$P, \overline{P}$ sono positivi, essendo rispettivamente quadrati dei moduli di α e di $s\alpha$.

Facciamo vedere che pur di sostituire, ove occorra, a μ uno dei suoi particolari associati si può sempre ricadere in uno dei seguenti casi:

1°) *Due delle coordinate di α in modulo* $\leq \frac{1}{4}$.

(1) $s\alpha$ indica quel coniugato di α che si ottiene cangiando ε in ε^2.

(2) Ved. Gauss, Werke-Zweiter Band. s. 394.

2°) *Una delle coordinate di* α *in modulo* $\leq \frac{1}{4}$, *la somma dei moduli di due delle rimanenti* $\leq \frac{3}{4}$ (mentre ciascuno di essi si suppone $> \frac{1}{4}$, altrimenti saremmo nel 1° caso).

Osserviamo, anzitutto, che una delle coordinate di α si può sempre prendere in modulo $\leq \frac{1}{4}$. Infatti, se tutti i moduli delle coordinate superassero $\frac{1}{4}$, scelte due delle coordinate di segno uguale (che certo ci sono) ad es. b, d basterà ad α sostituire $\alpha\varepsilon$ (2ª oss.); il parametro $d - b$ risulterà $\leq \frac{1}{4}$ in modulo e gli altri $-b, a - b, c - b$ potranno rendersi (ove già non lo siano) in modulo $\leq \frac{1}{2}$ con l'aggiunta di ± 1 (1ª oss.). Se un'altra delle coordinate è in modulo $\leq \frac{1}{4}$ si cade nel 1° caso.

In caso contrario tre delle coordinate saranno in modulo $> \frac{1}{4}$; se tutte tre sono dello stesso segno, ad es. a, b, c, sostituendo ad α, $\alpha\varepsilon^{-1}$ abbiamo due coordinate $c - a$, $b - a$ in modulo $< \frac{1}{4}$ e le altre due $a, d - a$ si potranno far cadere nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con togliere o aggiungere, ove occorra, un'unità ricadendo nel 1° caso.

Resta da esaminare il caso di tre coordinate a, b, c in modulo $> \frac{1}{4}$ con due a, b di uno stesso segno ed una c di segno contrario. di più $|d| \leq \frac{1}{4}$. Ora, se $|a| + |c| \leq \frac{3}{4}$ cadiamo nel 2° caso; se invece $|a| + |c| > \frac{3}{4}$ sostituendo ad α, $\alpha\varepsilon^{-1}$ troviamo una coordinata $b - a$ in modulo $< \frac{1}{4}$ e la coordinata $c - a$ in modulo $> \frac{3}{4}$; questa con l'aggiunta di ± 1 diviene in modulo $\leq \frac{1}{4}$ e si cade nel 1° caso.

Dimostriamo ora che nei due casi sopra detti $N(\alpha) < 1$ ed è quindi sempre possibile decomporre il quoto $\frac{\mu}{\nu}$ nel modo richiesto. Difatti nel 1° caso, essendo

$$2(P + \bar{P}) \leq 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

sarà:

$$2(P + \overline{P}) \leq 5\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{25}{8}$$

e

$$P + \overline{P} \leq \frac{25}{16}.$$

È noto che « *se due quantità positive hanno somma costante il loro prodotto diventa massimo quando queste due quantità sono uguali* ».

Quindi per un dato valore di $s = P + \overline{P}$ il prodotto $P.\overline{P}$ diviene massimo per $P = \overline{P} = \frac{s}{2}$ ed il valore massimo del prodotto è $\left(\frac{s}{2}\right)^2$. Poichè il valore massimo di s è $\frac{25}{16}$, il valore massimo di $N(\alpha) = P.P$ sarà:

$$\left(\frac{25}{32}\right)^2 < 1.$$

Nel 2° caso invece, per un dato valore della somma s di due dei moduli delle coordinate $\left(\text{somma che, come sappiamo, si suppone } \leq \frac{3}{4}\right)$. il valore massimo della somma dei loro quadrati si ha quando i due moduli si scostano l'uno dall'altro più che è possibile, ciò che accade quando uno dei due è uguale a $\frac{1}{4}$ e l'altro a $s - \frac{1}{4}$ ed allora la somma dei quadrati dei moduli diviene $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(s - \frac{1}{4}\right)^2$ e variando s raggiungerà il suo massimo valore per $s = \frac{3}{4}$. Questo valore massimo ha luogo quando uno dei due detti moduli prende il valore $\frac{1}{2}$ e l'altro il valore $\frac{1}{4}$, ed allora si ha:

$$2(P + \overline{P}) \leq 5\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = \frac{25}{8}$$

quindi:

$$P + \overline{P} \leq \frac{25}{16}$$

e, come nel 1° caso,

$$N(\alpha) = P.\overline{P} \leq \left(\frac{25}{32}\right)^2 < 1.$$

Abbiamo, per ora, dimostrato che:

« *Dati due interi* μ, ν *del corpo con* $N(\mu) \geq N(\nu)$, *si può trovare un altro intero* A *tale che sia* $N(\mu - \nu A) < N(\nu)$ *od anche* $N(R) < N(\nu)$ » (ponendo $\mu - \nu A = R$) [1].

[1] Ved. Bianchi, *Teoria dei numeri*, pag. 10-11.

Se nella $\mu = \nu A + R$ non è $R = 0$ si può proseguire nello stesso modo la divisione di ν per R e si troverà:

$$\nu = RA_1 + R_1 \qquad \text{con} \qquad N(R_1) < N(\nu)$$

e così di seguito. L'operazione termina certamente con un resto R_n che divide il precedente R_{n-1} e questo perchè i numeri interi positivi

$$N(\nu) \ , \ N(R) \ , \ N(R_1) \ldots$$

formano una serie decrescente, che perciò si arresta.

Scriviamo la catena limitata d'uguaglianze:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mu = \nu A + R & N(R) < N(\nu) \\ \nu = RA_1 + R_1 & N(R_1) < N(R) \\ R = R_1 A_2 + R_2 & N(R_2) < N(R_1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ R_{n-2} = R_{n-1} A_n + R_n & N(R_n) < N(R_{n-1}) \, . \end{array}\right.$$

Vediamo così che ogni divisore comune di μ , ν divide per la 1ª anche R, quindi per la 2ª R_1 ecc. e infine R_n. È pure chiaro che R_n dividendo R_{n-1} divide R_{n-2}, divide R_{n-3} ... e infine μ , ν.

Si conclude che R_n è il divisore comune di massima norma di μ , ν e dicesi perciò il loro *massimo comun divisore.*

Resta così dimostrato che:

« Nel corpo delle radici quinte dell'unità vale sempre l'algoritmo delle successive divisioni ».

Matematica. — *Genesi cinematica intrinseca del parallelismo di Levi-Civita per le superficie a curvatura costante.* Nota di GIUSEPPE CORBELLINI, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

1. Prendiamo le mosse dalla definizione costruttiva del parallelismo superficiale di Levi-Civita [1] nella forma riproducente nel campo infinitesimale il comportamento delle parallele euclidee.

Sopra una superficie, dati due punti P e P′ infinitamente vicini ed una direzione uscente da P e appartenente alla superficie, si dirà parallela ad essa in P′ quella direzione uscente da P′ che forma in P′ con la geodetica PP′ lo stesso angolo che la direzione data forma in P con la geodetica stessa.

Supposta ora tracciata sopra una superficie una curva t passante per P e per P′, sulla quale sia assegnato come verso positivo quello che va da P

[1] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo* ecc. Rend. Circ. Palermo, tomo 42°, 1917, pp. 173 e seg.; F. Severi, *Sulla curvatura* ecc. ibid, pp. 227 e seg.

a P', la costruzione precedente ripetuta per gli infiniti punti della curva successivi a P permette di caratterizzare in un punto Q di t, a distanza finita da P, la direzione parallela alla direzione assegnata in P. Si dice allora che la direzione data è stata trasportata per parallelismo da P a Q secondo la curva di trasporto t.

Risulta subito dalle costruzioni precedenti che il nuovo parallelismo gode della proprietà, fondamentale per il parallelismo euclideo, di conservare gli angoli e cioè la corrispondenza per parallelismo tra due fasci di direzioni è un'uguaglianza diretta.

2. Sfruttiamo questa circostanza riferendoci alle superficie a curvatura costante, le quali godono, com'è noto, della proprietà che figure uguali tracciate in esse si possono portare a coincidere l'una con l'altra mediante uno strisciamento della superficie su se stessa; vale a dire poniamoci il problema di caratterizzare sopra le superficie a curvatura costante non nulla i movimenti atti a portare a coincidere fasci di direzioni corrispondenti fra loro per parallelismo.

Per fissare le idee ci riferiremo di regola ad una sfera di raggio reale R; il lettore s'accorgerà peraltro che, con lievi modificazioni formali, il ragionamento è valido anche per le pseudosfere, purchè queste superficie si immaginino idealmente proseguite in modo da realizzare l'intero piano della metrica proiettiva iperbolica. Inoltre converremo di riguardare come un unico punto della sfera la coppia di punti diametralmente opposti su di essa.

3. Per il caso del trasporto infinitesimale da P a P' la caratterizzazione del movimento è immediata. Esso trasporta il fascio delle direzioni uscenti da P in guisa che il punto P si porti in P' e che la direzione PP' scorra sopra il cerchio massimo individuato da P e P'. Tale movimento consiste in una rotazione infinitesima della superficie solidale con il fascio P, intorno al polo del cerchio massimo individuato da P e P'; l'ampiezza della rotazione è misurata da $\frac{\overline{PP'}}{R}$.

4. La composizione di infiniti casi elementari per tutti i punti della curva t successivi a P ci permette ora di risolvere il problema integrale consistente nel definire un movimento continuo della sfera su sè stessa, durante il quale un fascio di direzioni avente il suo vertice in un punto della curva t si sposta sulla superficie in modo che le posizioni successive di ciascuna delle sue direzioni siano parallele alla posizione iniziale rispetto alla curva t.

Trattandosi di un movimento continuo per applicabilità esso sarà determinato, astrazione fatta dallo spazio ambiente, allorchè si conoscano la curva base e la curva rotolante del movimento.

5. Sulla curva t fissiamo più punti P, P', P''... infinitamente vicini fra loro e succedentisi nell'ordine scritto.

Rotando la superficie di un angolo $\frac{\widehat{PP'}}{R}$ intorno al polo del cerchio massimo PP' si stabilisce tra il fascio di partenza in P e quello di arrivo in P' una corrispondenza per parallelismo; successivamente la rotazione analoga intorno al polo del cerchio massimo $P'P''$ stabilisce tra il fascio costruito in P' e quello di arrivo in P'' una corrispondenza per parallelismo, e così di seguito. Apparisce perciò che il movimento continuo richiesto è costituito dalla successione di infinite rotazioni di ampiezza infinitesima intorno al luogo dei poli dei cerchi massimi tangenti alla curva t, cioè intorno alla polare di t. Poichè questa curva va immaginata solidale con la t, che durante il trasporto per parallelismo resta fissa, essa va riguardata come la curva base del movimento continuo.

6. Per determinare la curva che durante il movimento rotola senza strisciare sopra la curva dianzi caratterizzata, si potrebbe sfruttare la circostanza che l'ampiezza di ogni rotazione infinitesima uguaglia l'angolo di contingenza della curva base nel centro di rotazione. Ma si può procedere più speditamente così: immaginiamo il fascio di direzioni che si trasportano per parallelismo solidale con il fascio dei circoli massimi individuati da quelle direzioni. Denomineremo per brevità fascio mobile la figura costituita da questi circoli massimi. Notiamo che il centro di rotazione si trova costantemente sopra il cerchio massimo (variabile in generale nel fascio mobile) che è normale alla curva di trasporto; inoltre ha distanza sferica $\frac{1}{2}\pi R$ dal vertice del fascio. Da ciò si conclude che il luogo dei centri delle rotazioni immaginato solidale col fascio mobile, è il circolo massimo polare del vertice del fascio stesso.

Vi è un caso in cui non muta il circolo massimo del fascio mobile sul quale si trova il centro di rotazione, quando cioè la curva t è essa stessa un circolo massimo.

Ma anche questo caso d'eccezione si può far rientrare convenzionalmente nel caso generale.

7. Potremo così concludere: *assegnata sulla sfera una curva t, l'operazione di trasportare per parallelismo secondo t un fascio di direzioni avente il vertice sulla curva t, equivale ad un movimento continuo della sfera su sè stessa, nel quale la curva base è la polare della curva t e la curva rotolante è il cerchio massimo polare del vertice del fascio di direzioni.*

8. Se si trasporta un fascio di direzioni lungo un arco finito $\widehat{PQ}$ della curva t, è manifesto che tanto sulla curva base che sulla rotolante il punto di contatto descrive un arco che, a meno del fattore R, è uguale al valore assoluto del divario fra gli angoli che la curva di trasporto forma in P ed in Q con due direzioni parallele fra loro.

Si trova così una proposizione (1) (che è un'immediata conseguenza della caratterizzazione del parallelismo da cui siamo partiti) affermante che il divario fra gli angoli nominati è espresso, a parte il segno, dall'integrale dell'angolo di contingenza della curva di trasporto esteso all'arco $\widehat{PQ}$.

9. Per applicare la genesi cinematica intrinseca esposta, facciamo due osservazioni: anzitutto un generico circolo massimo del fascio mobile incontra perpendicolarmente il circolo massimo rotolante; il punto d'intersezione descrive, durante il movimento, una evolvente della curva base del movimento stesso, la quale è inviluppata dal circolo massimo considerato; in secondo luogo il punto di contatto con l'inviluppo dista di $\frac{1}{2}\pi R$ dal vertice del fascio mobile.

10. Supponiamo ora data sulla sfera una curva l e consideriamo il sistema dei circoli massimi che la inviluppano (ciascuno dei quali si immaginerà terminato al punto di contatto con l). Proponiamoci di determinare una traiettoria t del sistema che sia tagliata dai cerchi massimi dati secondo direzioni parallele.

Si presentano due vie. La prima osservazione precedente mostra che questa traiettoria ha per polare la evoluta di l. La seconda osservazione permette di costruire la traiettoria t staccando su ciascuno dei circoli massimi del sistema, un arco uguale a $\frac{1}{2}\pi R$ a partire dal punto di contatto con l'inviluppo l. Evidentemente entrambi le costruzioni indicate conducono alla medesima traiettoria t.

11. Si può anzi mostrare che non esiste altra curva, oltre quella caratterizzata, che sia distinta dai circoli massimi del sistema, e che sia tagliata da questi secondo direzioni parallele.

La dimostrazione si fa per assurdo. Supponiamo che esistano due traiettorie t e t' distinte fra loro e godenti della detta proprietà. Due generici circoli massimi del sistema, infinitamente vicini fra loro, taglino la curva t, rispettivamente nei punti A e B, e la curva t' rispettivamente nei punti A′ e B′. L'ipotesi che la t' sia distinta dalla t, porta di conseguenza che esisteranno alcune coppie di circoli massimi come quella considerata, per le quali gli archetti infinitesimi $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ non hanno punti in comune fra loro. Se ora si considerano gli archetti infinitesimi di geodetica che congiungono A con B ed A′ con B′, si rileva che il quadrangolo ABB′A′ è un quadrangolo geodetico non intrecciato che, per la definizione del parallelismo, ha coppie di angoli interni (quelli rispettivamente adiacenti ai lati $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$) supplementari fra loro.

(1) Essa è contenuta implicitamente in una formula del Levi-Civita (Mem. cit. § 9) sotto forma più generale, relativamente cioè ad una superficie generica.

Ma ciò è assurdo. Pertanto la curva t' deve coincidere o con la t o con uno dei circoli massimi del sistema.

12. Nel caso speciale della sfera la traiettoria t di un sistema di circoli massimi (§ 10) è sempre propria; non così sulla pseudosfera per la quale è opportuno distinguere in un sistema di geodetiche tre regioni, secondo che le geodetiche toccano il loro inviluppo in un punto proprio, improprio o ideale. È ovvio che la traiettoria t è costituita da punti proprî solo nella regione delle geodetiche che toccano l'inviluppo in un punto ideale. In particolare in un fascio improprio di geodetiche non esiste una traiettoria t costituita da punti proprî; cioè in altri termini, il parallelismo di Levi-Civita non ha rapporto con il parallelismo di Lobatschefskij.

Matematica. — *Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche.* Nota del dott. GIULIO DARBI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Un lavoro del prof. Capelli (1) « Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche », mi ha suggerito l'idea della presente Nota, che si propone di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione in x, che si ottiene eliminando le $(n-1)$ variabili $y, z, \ldots u, v, w$ dalle n equazioni del sistema:

$$\begin{aligned} &f_1(x, y, z, \ldots u, v, w) = 0 \\ &f_2(y, z, \ldots\ldots u, v, w) = 0 \\ &f_3(z \ldots\ldots\ldots u, v, w) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n-2}(u, v, w) = 0 \\ &f_{n-1}(v, w) = 0 \\ &f_n(w) = 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

sia irreduttibile in un campo di razionalità K, a cui appartengono i coefficienti delle precedenti equazioni, che sono razionali intere rispetto alle variabili $x, y, z, \ldots u, v, w$.

I risultati esposti nelle pagine che seguono, trovano utile applicazione ad una importante e nota (2) classe di equazioni.

1. Date le equazioni $V(y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, con coefficienti appartenenti ad un campo di razionalità K, supponiamo che l'equazione $f(x) = 0$, che si ottiene eliminando y dalle precedenti equazioni, abbia tutte le sue radici $x_1, x_2, \ldots x_n$ distinte.

(1) Cfr. Alfredo Capelli, *Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche.* Giornale di matematiche di Battaglini. Nota III, anno 1904, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli. Maggio 1898.

(2) Cfr. Henri Weber, *Traité d'Algèbre supérieure,* § 150, pp. 531-533, deuxième édition 1898.

Le due equazioni $V(y) = 0$, $\psi(x_i, y) = 0$ ammettono una sola radice comune y_1, che si può quindi esprimere in funzione razionale intera di x_i, con coefficienti appartenenti a K, cioè si ha: $y_1 = \varphi(x_i)$.

È chiaro che, operando sull'equazione $f(x) = 0$ la trasformazione $y = \varphi(x)$, l'equazione in y a radici distinte, la quale ha per radici i differenti valori che può assumere y per tutti i valori $x_1, x_2, \ldots x_n$, è equivalente all'equazione $V(y) = 0$, ed il primo membro dell'equazione $\psi(x, y_1) = 0$ coincide, a meno di un fattore costante, col massimo comune divisore fra $f(x)$ e $\varphi(x) - y_1$.

Il prof. Capelli [1] dimostra il seguente teorema:

« Affinchè l'equazione $f(x) = 0$ sia irreduttibile nel campo di razionalità K, è necessario e sufficiente che l'equazione trasformata $V(y) = 0$ sia irreduttibile nello stesso campo K e che l'equazione $\psi(x, y_1) = 0$ (ove y_1 è una radice di $V(y) = 0$), sia irreduttibile nel campo (K, y_1) ».

2. Dato il sistema (1), supponiamo che la prima equazione sia di grado m_1 rispetto ad x; la seconda sia di grado m_2 rispetto ad y; in generale l'i^{ma} equazione sia di grado m_i rispetto alla variabile che, fra le altre, vi occupa il primo posto; l'ultima equazione, cioè $f_n(w) = 0$ sia di grado m_n rispetto a w. L'equazione $F_{n-1}(x) = 0$, che si ottiene eliminando $y, z, \ldots u, v, w$ dalle equazioni del sistema (1), è di grado $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots m_n$ in x; supponiamo che abbia tutte le radici distinte. Eliminiamo y dalle due prime equazioni del sistema (1) e sia $F_1(x, z, \ldots u, v, w) = 0$ la risultante ottenuta. Dalla terza equazione del sistema (1) e dalla precedente eliminiamo z ed avremo l'equazione $F_2(x, \ldots u, v, w) = 0$. Così, seguendo lo stesso procedimento, perverremo all'equazione $F_{n-2}(x, w) = 0$, che risulta dalla eliminazione di v dalle due equazioni $F_{n-3}(x, v, w) = 0$, $f_{n-1}(v, w) = 0$. Se, dalle due equazioni $F_{n-2}(x, w) = 0$, $f_n(w) = 0$, eliminiamo w, otteniamo l'equazione $F_{n-1}(x) = 0$. Avendo supposto che tale equazione abbia tutte le radici distinte, altrettanto deve accadere per ciascuna delle equazioni del tipo $F_i(x, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0$, essendo $(\ldots u_1, v_1, w_1)$ una delle soluzioni che soddisfano al sistema delle ultime $(n - 1)$ equazioni di (1). L'equazione $F_{n-1}(x) = 0$, provenendo dalla eliminazione di w dalle due equazioni $F_{n-2}(x, w) = 0$, $f_n(w) = 0$, è, pel teorema del Capelli, irreduttibile in K se l'equazione $f_n(w) = 0$ è irreduttibile nello stesso campo K e se l'equazione $F_{n-2}(x, w_1) = 0$ (ove w_1, è una radice scelta a piacere dell'equazione $f_n(w) = 0$) è irreduttibile nel campo (K, w_1). Analogamente, l'equazione $F_{n-2}(x, w_1) = 0$ è irreduttibile nel campo (K, w_1), se l'equazione $f_{n-1}(v, w_1) = 0$ è irreduttibile in questo medesimo campo, e se l'equazione $F_{n-3}(x, v_1, w_1) = 0$ è irreduttibile nel campo (K, v_1, w_1), essendo (v_1, w_1) una soluzione scelta a piacere del sistema $f_n(w) = 0$, $f_{n-1}(v, w) = 0$. Il ragionamento, da fare

[1] Cfr. Capelli, già citata Nota.

sull'equazione $F_{n-3}(x, v_1, w_1) = 0$ e sulle altre, è analogo a quello testè seguito e conduce al seguente teorema:

« La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione $F_{n-1}(x) = 0$ (a radici distinte) che si ottiene eliminando $y, z, \ldots u, v, w$ dalle equazioni del sistema (1), sia irreduttibile nel campo di razionalità K, è che le equazioni:

$$f_1(x; y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0 \ , \ f_2(y; z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0,$$
$$f_{n-2}(u; v_1, w_1) = 0 \ , \ f_{n-1}(v; w_1) = 0 \ , \ f_n(w) = 0 .$$

siano irreduttibili rispettivamente nei campi:

$$(K, y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) \ , \ (K, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1)$$
$$(K, u_1, v_1, w_1) \ , \ (K, v_1, w_1) \ , \ (K, w_1) \ , \ K ,$$

ove $(y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1)$ rappresenta una soluzione, scelta a piacere, del sistema costituito dalle ultime $(n-1)$ equazioni di (1) ».

3. Le due equazioni $f_n(w) = 0$, $F_{n-2}(x_1, w) = 0$ ammettono una sola radice w_1 in comune perchè, come abbiamo supposto, l'equazione in x: $F_{n-1}(x) = 0$ ha tutte le radici distinte; si ha quindi l'uguaglianza (2) $w_1 = \varphi_1(x_1)$, cioè w_1, è un numero del campo (K, x_1).

Analogamente, le due equazioni: $f_{n-1}(v, w_1) = 0$, $F_{n-3}(x_1, v, w_1) = 0$ ammettono una sola radice v_1 in comune, che sarà quindi un numero del campo (K, x_1, w_1), ossia, tenuto conto della (2), un numero del campo (K, x_1), cioè: $v_1 = \varphi_2(x_1)$. In modo analogo si dimostra che, $y_1, z_1, \ldots, u_1, v_1, w_1$ sono numeri del campo (K, x_1), cioè si possono esprimere in funzione razionale intera di x_1, con coefficienti appartenenti a K.

Se la prima equazione del sistema (1) risulta lineare in x, si ha dunque la seguente eguaglianza:

$$(K, x_1) = (K, y_1, z_1, \ldots, u_1, v_1, w_1)$$

4. Denotiamo con $K_n, K_{n-1}, \ldots, K_2, K_1$ rispettivamente i campi $(K, y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1)$, $(K, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) \ldots (K, w_1)$, K. Se il primo membro dell'equazione $f_1(x; y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0$ si decompone in λ_1 fattori irreduttibili in K_n, denotiamo con $\varphi_1(x; y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1)$ uno di tali fattori; analogamente, sia $\varphi_2(y; z_1, \ldots u_1, v_1, w_1)$ uno dei λ_2 fattori irreduttibili nel campo K_{n-1}, in cui si decompone il primo membro dell'equazione: $f_2(y; z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0$. Così continuando, sia $\varphi_n(w) = 0$ uno dei λ_n fattori irreduttibili in K, in cui si decompone il primo membro dell'equazione: $f_n(w) = 0$.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, z \ldots u, v, w) = 0 \\ &\varphi_2(y, z, \ldots u, v, w) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_{n-1}(v, w) = 0 \\ &\varphi_n(w) = 0 \end{aligned} \qquad (1)'$$

Si denoti con $\Phi_1(x) = 0$ la risultante, che si ottiene dalla eliminazione di $y, z, \ldots u, v, w$, dalle equazioni (1)', che formano un sistema della medesima forma di (1). Ricordando il teorema enunciato alla fine dell'art. 2, si ricava che l'equazione $\Phi_1(x) = 0$ è irreduttibile in K.

Se consideriamo gli altri fattori irreduttibili nei campi $K_n, K_{n-1}, \ldots, K_2, K_1$. nei quali si decompongono rispettivamente i primi membri delle equazioni:

$$f_1(x; y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0 \quad , \quad f_2(y; z_1, \ldots u_1, v_1, w_1) = 0$$
$$\ldots f_{n-1}(v; w_1) = 0 \quad , \quad f_n(w) = 0 . \qquad (3)$$

otterremo altri sistemi analoghi ad (1)' e quindi altre equazioni risultanti in x, cioè: $\Phi_1(x) = 0$, $\Phi_2(x) = 0$, $\ldots \Phi_\lambda(x) = 0$, le quali sono irreduttibili in K e non hanno alcuna radice in comune. Si ha dunque:

$$F_{n-1}(x) = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \ldots \Phi_\lambda(x) .$$

Ora è facile dimostrare l'eguaglianza:

$$\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_n .$$

5. Dopo quanto si è detto nel precedente art., possiamo enunciare il seguente teorema:

« Il numero dei fattori irreduttibili in K, nei quali si spezza il primo membro dell'equazione in x, che si ottiene dalla eliminazione di $y, z, \ldots u, v, w$, dalle equazioni del sistema (1) è uguale al prodotto $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \lambda_n$, denotando λ_1 il numero dei fattori irreduttibili nel campo K_n nel quale si spezza la funzione $f_1(x; y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1)$; così λ_2 rappresenta il numero dei fattori irreduttibili in K_{n-1}, nel quale si spezza la funzione $f_2(y; z_1, \ldots u_1, v_1, w_1)$, in generale λ_i rappresenta il numero dei fattori irreduttibili nel campo K_{n-i+1}, in cui si spezza la funzione che occupa l' i^{mo} posto nel sistema (3) ».

6. Se si hanno più irrazionali algebrici $y_1, z_1, \ldots u_1, v_1, w_1$ rispetto ad un dato campo di razionalità K, sappiamo (1) che l'aggiunzione simultanea di essi al campo K può essere sostituita dall'aggiunzione al campo K di un solo irrazionale x_1. In altri termini. date più equazioni:

$$f_2(y) = 0 \ , \ f_3(z) = 0 \ , \ \ldots \ , \ f_n(w) = 0 , \quad (4)$$

che abbiano coefficienti appartenenti ad un dato campo K, è possibile (1) di costruire una funzione razionale $x = f_1(y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1)$ delle radici delle precedenti equazioni, tale che, eliminando da queste le variabili $y, z, \dots u, v, w$, si ottenga per risultante in x l'equazione $F(x) = 0$, (5) le cui radici siano distinte, la quale gode della proprietà per cui, denotando con x_1 una di queste radici, si ha l'eguaglianza:

$$(K, x_1) = (K, y_1, z_1, \dots u_1, v_1, w_1).$$

Poichè il sistema, che si ottiene aggregando alle equazioni (4) l'equazione: $x = f_1(y, z, \dots w)$, non è che un caso particolare del sistema (1), così potremo applicare alla (5) i risultati ottenuti in questa Nota.

Matematica. — *Un nuovo carattere distintivo dei gruppi di sostituzioni.* Nota del Dr. LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Finora i gruppi di sostituzioni sopra lettere venivano distinti in transitivi e intransitivi, primitivi e imprimitivi, ecc.; e corrispondentemente avevamo un'importante classificazione delle equazioni algebriche a seconda dei loro gruppi di Galois (2).

A completare tale classificazione introdurremo ora il nuovo concetto di *sistaticità* di un gruppo di sostituzioni, importante sopratutto per ciò che riguarda l'esprimibilità di una radice in funzione razionale di un'altra; argomento questo da me già trattato per via prevalentemente algebrica in una precedente Nota (3).

2. Diremo dunque che un gruppo di sostituzioni G_N è *sistatico* quando tutte le sue sostituzioni che lasciano fissa una lettera lasciano fisse anche altre lettere, *asistatico* nel caso contrario (4).

Consideriamo ora un gruppo transitivo G_N di sostituzioni su n lettere $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$. Le sue sostituzioni che lasciano fissa una lettera, ad es. ϑ_1, formeranno un sottogruppo Γ_m d'ordine m uguale a $\frac{N}{n}$; inoltre i sottogruppi

(1) Cfr. Weber, opera già citata.

(2) Cfr. L. Bianchi. *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*. Pisa, Spoerri. 1900.

(3) Luigi Fantappiè. *Alcuni teoremi sulle equazioni algebriche.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. vol. XXXI, serie 5ª. 2° sem., ; settembre 1922.

(4) Queste definizioni, come anche alcuni teoremi che seguono (N. 4 e 5), ricordano definizioni e proprietà analoghe dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Cfr. L. Bianchi. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.* Pisa. Spoerri, 1918, § 70 e 71, pàg. 185 e seg.

che lasciano fisse $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ saranno i trasformati di Γ_m mediante certe sostituzioni $g_2, \ldots, g_n$ che portino ϑ_1 in $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ rispettivamente. Se il gruppo G_N, oltre ad esser transitivo, è anche sistatico, tutte le m sostituzioni di Γ_m oltre ϑ_1 (che indicheremo ora con ϑ_{11}) dovranno lasciar fisse anche altre lettere che indicheremo con $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$. D'altra parte le sostituzioni che lasciano fisse $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ sono anch'esse in numero di m essendo quelle dei gruppi $g_{21}^{-1}\Gamma_m g_{21}, \ldots, g_{1\nu}^{-1}\Gamma_m g_{1\nu}$ rispettivamente; quindi le m sostituzioni di Γ_m sono appunto tutte e sole quelle sostituzioni che lasciano fisse $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$. Si ha così che:

In un gruppo transitivo G_N, *se tutte le sostituzioni che lasciano fissa una lettera* ϑ_i *lasciano fissa anche un'altra lettera* ϑ_k, *viceversa tutte le sostituzioni che lasciano fissa* ϑ_k *lasciano fissa anche* ϑ_i.

3. Essendo le $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ in posizione perfettamente equivalente l'una rispetto all'altra, diremo che queste lettere formano un *sistema di sistaticità* del gruppo G_N, sistema caratterizzato dunque dal fatto che tutte le sostituzioni di G_N che lasciano fissa una sua lettera lasciano fisse anche tutte le altre lettere.

Avendo supposto G_N transitivo esisterà poi una sostituzione g_{21} che porterà ϑ_{11} in ϑ_{21} fuori del suo gruppo di sistaticità, e sarà $g_{21}^{-1}\Gamma g_{21}$ il sottogruppo delle sostituzioni di G_N che lasciano fissa ϑ_{21}. Ma le sostituzioni di questo sottogruppo, trasformato di Γ_m mediante la g_{21}, lasceranno fissa non soltanto ϑ_{21} ma anche tutte le altre lettere $\vartheta_{22}, \ldots \vartheta_{2\nu}$ in cui g_{21} porta $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ rispettivamente e nessun'altra; che se infatti le sostituzioni g' di $g_{21}^{-1}\Gamma g_{21}$ lasciassero fissa anche un'altra lettera $\vartheta_{2,\nu+1}$, le sostituzioni $g_{21}\, g'\, g_{21}^{-1}$ di Γ_m dovrebbero lasciar fissa anche la lettera $\vartheta_{1,\nu+1}$ portata da g_{21} in $\vartheta_{2,\nu+1}$, contro l'ipotesi che le $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ esauriscano il sistema di sistaticità prima considerato. Questo sottogruppo $g_{21}^{-1}\Gamma g_{21}$ sarà dunque costituito da tutte quelle sostituzioni di G_N che lasciano fisse $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$, le quali costituiranno, per ciò che s'è visto, un altro *sistema di sistaticita* di G_N. Se le $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}, \vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ non esauriscono tutte le n lettere ϑ, operando analogamente con una nuova sostituzione g_{31} che porti ϑ_{11} fuori di questi due sistemi di sistaticità, se ne verrebbe a trovare un terzo, e così via fino ad esaurire tutte le n lettere che verranno quindi a distribuirsi in un certo numero h di sistemi di sistaticità; e sarà $n = h\nu$. Segue di qui che:

In un gruppo G_N *transitivo e sistatico le* n *lettere su cui operano le sue sostituzioni si distribuiscono in un certo numero* h, *divisore di* n, *di sistemi di sistaticità, contenente ognuno un medesimo numero* ν, *pure divisore di* n, *di lettere.*

4. Il metodo sopra riportato, che ci ha condotto alla determinazione dei varî sistemi di sistaticità, ci fa vedere inoltre che se una lettera di un

sistema, p. es. ϑ_{11}, è portata da una sostituzione in una di altro sistema, p es. ϑ_{21}, anche tutte le altre lettere del 1° sistema sono portate in quelle del 2°; cioè le sostituzioni di G_N portano le lettere di uno stesso sistema di sistaticità ancora nelle lettere di un medesimo sistema. Si ha quindi che:

Un gruppo G_N transitivo e sistatico è anche imprimitivo, e gli h sistemi di sistaticità costituiscono altrettanti sistemi d'imprimitività.

5. Osserviamo che *un gruppo con transitività multipla è certamente asistatico*; poichè altrimenti, per il teorema precedente, sarebbe anche imprimitivo, il che è assurdo.

6. Poichè un gruppo G_N transitivo e sistatico è anche imprimitivo (N. 4), le sue sostituzioni scambieranno gli h sistemi d'imprimitività, che indicheremo con $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_h$, secondo le sostituzioni di un nuovo gruppo $G_N^{(1)}$, in isomorfismo con G_N, che potrà eventualmente essere anch'esso sistatico. Se sono allora $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \ldots, \theta_{iv'}$ $(i = 1, 2, \ldots, h'$ e $h = h'v')$ i suoi h' sistemi di sistaticità, diremo anche che gli h sistemi di sistaticità *del prim'ordine* del gruppo G_N si sono riuniti v' a v' in h', divisore di h, sistemi di sistaticità *del secondo ordine* (ognuno di vv' lettere) dello stesso gruppo G_N; e analogamente si potranno definire i sistemi di sistaticità del 3°, 4° ordine, ecc. Diremo anche, in questi casi, che il gruppo G_N è doppiamente, triplamente sistatico, ecc. È chiaro inoltre che tutte le sostituzioni di G_N che scambiano tra loro le lettere di un medesimo sistema d'ordine r, scambieranno pure tra loro le lettere di tutti gli altri sistemi d'ordine r appartenenti allo stesso sistema d'ordine $r+1$.

7. Vediamo ora quale è l'interpretazione algebrica della sistaticità di un gruppo. Sia perciò G_N il gruppo di Galois di una certa equazione irriducibile

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 .$$

Se G_N, oltre ad esser transitivo, è anche sistatico ed è $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1v}$ un suo sistema di sistaticità del 1° ordine, significa che il sottogruppo numerico Γ_m di ϑ_{11} è lo stesso di quello di $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1v}$, e che quindi, aggiunta al campo di razionalità la radice ϑ_{11}, le altre $\vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1v}$ sono razionalmente note perchè possono concepirsi come funzioni delle radici invarianti per le sostituzioni del nuovo gruppo di Galois Γ_m, a cui s'è abbassato G_N dopo l'introduzione di ϑ_{11} [1]; cioè *le radici di un medesimo sistema di sistaticità del 1° ordine sono esprimibili razionalmente l'una per l'altra*.

Se poi G_N è doppiamente sistatico, il sottogruppo numerico di una funzione simmetrica φ delle radici $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1v}$, di un medesimo sistema del 1° ordine, coincide con quello di un'altra qualsiasi funzione simme-

[1] Cfr. L. Bianchi. *Gruppi di sostituzioni*, ecc.

trica $\psi(\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu})$ quando il sistema del 1° ordine $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ appartenga al medesimo sistema di 2° ordine del precedente, e quindi, per la solita ragione, sarà ψ esprimibile razionalmente per φ. Analogamente accadrebbe pei sistemi d'ordine superiore e in conclusione si ha dunque che:

Se $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ *e* $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ *sono due sistemi di sistaticità del medesimo ordine* r, *appartenenti a uno stesso sistema d'ordine* $r+1$, *qualsiasi funzione razionale e simmetrica di* $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ *è razionalmente esprimibile per un'altra qualsiasi funzione razionale e simmetrica di* $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$.

Matematica. — *Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières.* Nota di Miloš Kössler, presentata dal Corrispondente G. Fubini.

Dans cette Note je poursuis l'étude initiée dans une Note précédente (Ces Rendiconti, vol. XXXII, 1° sem., pag. 26: *Sur les singularités* ecc.).

1. Faisant usage du théorème II de la Note citée, on peut obtenir, ne changeant que les angles φ_N, qu'un point $e^{i\psi}$, choisi à volonté sur la circonférence du cercle de convergence, devienne singulier pour $f(z)$. Cas particulier de tels changements est l'addition de l'angle π ou le changement du signe de a_n. À cet effet choisissons la suite (5) de façon que les nombres Λ_{N_q}, dans lesquels les membres de (5) occupent des positions distinguées, définissent des groupes des a_n sans élément communs à deux: c'est-à-dire que les groupes $N_q^{\text{ième}}$ et $N_r^{\text{ième}}$ soient sans élément commun, toute fois que $q \geqq r$. Or il suffit à cet effet de choisir la suite (5) de manière que

$$n_{q+1} \geqq 2(1+\lambda)\, n_q, \tag{7}$$

λ étant une constante positive arbitrairement petite. Dans ce cas, le nombre N_q appartenant à n_q satisfait, d'après (2), aux inégalités

$$\nu - \gamma\nu^{\frac{2}{3}-\vartheta} < n_q < \nu + \gamma\nu^{\frac{2}{3}+\vartheta} \qquad \nu = \left[\frac{N_q}{4}\right],$$

d'où, par un calcul facile,

$$N_q > 4n_q(1-\eta_0)\,,\quad N_q < 4n_q(1+\eta_1)\,,\quad N_q - \left[\frac{N_q}{2}\right] > 2n_q(1-\eta_2)\,,$$

$$\lim \eta_0 = \lim \eta_1 = \lim \eta_2 = 0 \;,\; q \to \infty .$$

Les termes a_n du $N_{q+1}^{\text{ième}}$ groupe commencent par le plus petit index

$$n = N_{q+1} - \left[\frac{N_{q+1}}{2}\right];$$

ceux du $N_q^{\text{ième}}$ groupe finissent par le plus grand index $n = N_q$. Il suffit évidemment, pour l'absence demandée de termes communs, que

$$N_{q+1} - \left[\frac{N_{q+1}}{2}\right] > N_q .$$

D'après les inégalités précédentes, il suffit que

$$2n_{q+1}(1 - \eta_2) > 4n_q(1 - \eta_1) .$$

Or ceci est assuré, commençant d'un certain q, par l'inégalité (7).

Cela étant posé, choisissons un tel groupe A_{N_q} déterminé dont a_{n_q} soit un coefficient distingué. De ce qui a été dit, on voit tout de suite que ce groupe ne contient aucun autre terme de la suite (5). Changeons dans ce groupe les angles φ_N de manière que l'inégalité (6) soit remplie dans tout ce groupe. Or si l'on choisit parmi les a_{n_q} (et, par suite, aussi les A_{n_q}) une suite infinie arbitraire (par un choix des entiers q) et que l'on effectue, dans tous les groupes correspondants, l'opération indiquée, le point $z = e^{i\psi}$ deviendra, d'après II, un point singulier pour la série (1). Il est évident qu'on peut simplement laisser φ_N inaltéré, si la condition (6) est remplie; ou y ajouter π, si elle ne l'est pas.

2. Maintenant, nous allons généraliser le théorème de Fatou-Polya de la manière suivante:

III. *Si, dans la série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad a_n = |a_n| e^{i\varphi_n} ,$$

on change, convenablement, dans certains groupes de coefficients, les valeurs des angles φ_n, la circonférence du cercle de convergence devient la frontière du domaine d'existence de la fonction (1).

La démonstration est simple. Choisissons la suite (5) de manière que

$$n_{q+1} \geqq 2n_q(1 + \lambda)$$

et ordonnons les termes d'après le schème rectangulaire suivant des indices

$$\begin{array}{ccccccc} n_1 & n_3 & n_6 & n_{10} & \cdot & \cdot \\ n_2 & r_5 & n_9 & \cdot & \cdot & \\ n_4 & n_8 & \cdot & \cdot & & \\ n_7 & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & & & & & \end{array}$$

Ensuite, ordonnons tous les nombres rationnels de l'intervalle (0, 1) dans la suite

$$t_1 , t_2 , t_3 , \ldots , t_j , \ldots$$

(1) Un cas particulier de tels changements est l'addition de π à certains φ_n.

À l'angle $\psi_j = 2\pi t_j$ associons la $j^{\text{ième}}$ ligne du schème rectangulaire. Ces a_{n_q} qui appartiennent à la ligne en question, peuvent être considérés comme des termes d'une suite du type (5) et donc, d'après le numéro précédent, on peut faire de manière que le point $z = e^{i\psi_j}$ devienne singulier. Or, effectuons cela pour tous les ψ_j. Les points singuliers rempliront alors toute la circonférence du cercle de convergence.

On a ainsi, non seulement le théorème de Fatou-Polya, mais encore un procédé déterminé pour les changements des angles φ_n, resp. des signes des a_n, dans chaque cas particulier.

2. Le théorème II généralise celui de M. Vivanti, mais non celui de M. Dienes. J'énonce encore une généralisation du théorème de M. Dienes:

IV. *Si nous remplaçons, dans l'énoncé II, la condition 2° par la suivante:*

2°') *pour chaque groupe* $N_q^{\text{ième}}$, *on peut trouver un angle fixe* ψ_q *et un nombre positif* δ_q, *de façon que l'on ait*

$$\cos(\varphi_N - \psi_q) \geqq \delta_q \ , \quad \overline{\lim_{q \to \infty}} \sqrt[N_q]{\delta_q} = 1 \, ,$$

pour tous les coefficients $a_N = |a_N| e^{i\varphi_N}$ *du groupe, alors le point* $z = 1$ *est singulier.*

La démonstration est analogue à celle du théorème II.

Idromeccanica. — *Sull' influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali dei liquidi naturali. - Onde semplici smorzate.* Nota II di Umberto Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

7. *Moti permanenti.* – Se si tratta di moti permanenti, tanto c quanto w^* non dipendono esplicitamente dal tempo t, per cui la (20) si riduce alla seguente:

$$\frac{c^2}{h}\frac{dW^{*2}}{df^*} - ig\left\{\frac{1}{w^*(f^*+i)} - \frac{1}{w^*(f^*-i)}\right\} = \frac{4\nu c}{h} W^* \frac{d^2W^*}{df^{*2}} + \frac{4\nu c}{h^2}\left(\frac{dW^*}{df^*}\right)^2,$$

essendo ora

$$W^* = \sqrt{w(f^*+i)\cdot w^*(f^*-i)} \, .$$

Esprimendo mediante f e w, per le (17) e la prima delle (19), si ottiene [1]

$$\frac{dW^2}{df} - ig\left\{\frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)}\right\} = \frac{4\nu q^2}{h} W \frac{d^2W}{df^2} + 4\nu c\left(\frac{dW}{df}\right)^2, \tag{21}$$

essendo

$$W = \sqrt{w(f+iq)\cdot w(f-iq)} \, .$$

[1] Cfr. loco ultimo citato, pag. 199.

Per i liquidi perfetti ($\nu = 0$), il secondo membro è nullo e la (21) diviene la nota equazione di Levi-Civita [1].

8. *Soluzioni approssimate corrispondenti a onde progressive che vanno smorzandosi.* — Immaginiamo gli assi x, y animati da una traslazione uniforme, orizzontale, nel senso delle x negative e sia c il valore della velocità — *velocità di propagazione* del moto ondoso —. Allora w definisce la velocità relativa, per cui, se si suppone piccola la perturbazione ondosa di fronte alla velocità c, poniamo

$$w = c(1 + e^{-\lambda t}\varepsilon), \tag{21}$$

dove λ rappresenta una costante reale positiva, *a priori* arbitraria.

Risulta da questa che

$$\left| e^{-\lambda t}\varepsilon \right| = \left| \frac{w - c}{c} \right|,$$

rappresenta il valore della velocità assoluta della perturbazione ondosa; per cui, per piccole perturbazioni, ε dovrà trattarsi come quantità di primo ordine.

Per la (18), la (21) può scriversi

$$w^*(t\,;f^*) = 1 + e^{-\lambda t}\varepsilon(f^*).$$

Trattando ε come quantità di primo ordine, per la precedente, la (20) diviene

$$\frac{c^2}{h}\frac{d}{df^*}\Big\{\varepsilon(f^*+i)+\varepsilon(f^*-i)\Big\}+ig\Big\{\varepsilon(f^*+i)-\varepsilon(f^*-i)\Big\}=$$
$$=c\lambda\Big\{\varepsilon(f^*+i)+\varepsilon(f^*-i)\Big\}+\frac{2\nu c}{h^2}\frac{d^2}{df^{*2}}\Big\{\varepsilon(f^*+i)+\varepsilon(f^*-i)\Big\},$$

la quale, per le (17) e (19), può ridursi alla seguente:

$$\frac{d}{df}\Big\{\varepsilon(f+iq)+\varepsilon(f-iq)\Big\}+\frac{ig}{c^3}\Big\{\varepsilon(f+iq)-\varepsilon(f-iq)\Big\}= \tag{22}$$
$$=\frac{\lambda}{c^2}\Big\{\varepsilon(f+iq)+\varepsilon(f-iq)\Big\}+2\nu\frac{d^2}{df^2}\Big\{\varepsilon(f+iq)+\varepsilon(f-iq)\Big\}.$$

È questa l'equazione lineare in ε, caratteristica delle soluzioni approssimate, alle quali corrispondono onde che si propagano con velocità di valore c e che vanno smorzandosi con *costante di smorzamento* λ. Per $\lambda = \nu = 0$, la precedente viene a coincidere coll'equazione delle soluzioni approssimate, stabilita da Levi-Civita [2] per le onde progressive permanenti.

(1) *Sulle onde progressive di tipo permanente* [questi Rendiconti, vol. XVI (1907), pag. 783].

(2) Loco citato, pag. 787

9. *Onde semplici.* — Facilmente si può constatare che

$$\varepsilon(f) = \gamma \cos \frac{2\pi f}{\mu}, \tag{23}$$

è integrale della (22), reale per f reale se γ e μ designano due costanti reali arbitrarie, di cui la prima da trattarsi come quantità di primo ordine; la costante μ risultando legata a c, λ, g dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} c^3 = \dfrac{\mu g}{2\pi} \operatorname{Th} \dfrac{2\pi q}{\mu}, \\ \lambda = \dfrac{8\pi^2 \nu c^2}{\mu^2}. \end{cases} \tag{24}$$

Portando nella (21) l'espressione (23) di ε, si ottiene

$$w = c\left(1 + \gamma e^{-\lambda t} \cos \frac{2\pi f}{\mu}\right). \tag{25}$$

Per cui integrando la (16), con questa espressione di w, e assumendo $z = 0$ per $f = 0$, si ottiene

$$cz = f - \frac{2\pi\gamma}{\mu} e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \frac{2\pi f}{\mu}.$$

Risulta, da questa, che f differisce da cz per quantità di primo ordine, per cui la (25) può sostituirsi con la seguente:

$$w = c\left(1 + \gamma e^{-\lambda t} \cos \frac{2\pi cz}{\mu}\right), \tag{25'}$$

mentre dalla precedente stessa si può dedurre, con la solita approssimazione,

$$f = cz + \frac{2\pi\gamma}{\mu} e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \frac{2\pi cz}{\mu}. \tag{26}$$

Tanto dalla (25') quanto dalla (26) apparisce che la *lunghezza d'onda* è

$$\omega = \frac{\mu}{c}, \tag{27}$$

per cui la (26) può scriversi senz'altro

$$f = cz + \frac{2\pi\gamma}{c\omega} e^{-\lambda t} \operatorname{sen} \frac{2\pi z}{\omega}. \tag{26'}$$

Per la funzione di corrente si ricava da questa

$$\psi = cy + \frac{2\pi\gamma}{c\omega} e^{-\lambda t} \cos \frac{2\pi x}{\omega} \operatorname{Sh} \frac{2\pi y}{\omega},$$

la quale, per $\psi = q = ch$, fornisce la seguente equazione del pelo libero:

$$h = y + \frac{2\pi\gamma}{c^2\omega} e^{-\lambda t} \cos\frac{2\pi x}{\omega} \operatorname{Sh}\frac{2\pi y}{\omega};$$

e siccome y differisce da h per quantità di primo ordine, si può scrivere $\operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{\omega}$ al posto di $\operatorname{Sh}\frac{2\pi y}{\omega}$, per cui in definitiva si ottiene

$$(28) \qquad y = h - \frac{2\pi\gamma}{c^2\omega} e^{-\lambda t} \operatorname{Sh}\frac{2\pi h}{\omega} \cdot \cos\frac{2\pi x}{\omega}.$$

Per la (27) e per la prima delle (19), le (24) divengono

$$c^2 = \frac{\omega g}{2\pi} \operatorname{Th}\frac{2\pi h}{\omega} \quad , \quad \lambda = \frac{8\pi^2\nu}{\omega^2}.$$

Nella prima di queste riconosciamo la classica relazione che Airy dedusse per le onde semplici di *liquidi perfetti* e che nel caso di un canale molto profondo $\left(h = \infty \text{ , nel qual caso } c^2 = \frac{\omega g}{2\pi}\right)$ recentemente fu dal Levi-Civita [1] riconosciuta sussistere (non solo per onde approssimate, ma altresì) per onde rigorose di altezza finita. Parmi notevole la circostanza che *la relazione di Airy continua a valere anche per le onde semplici di liquidi naturali, cioè viscosi.*

La seconda, delle precedenti relazioni, definisce la *costante di smorzamento* delle onde; come si vede, essa *risulta proporzionale al coefficiente di viscosità e inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza dell'onda.*

Se il liquido è (oppure si può ritenere) perfetto, avendosi $\nu = 0$ e quindi $\lambda = 0$, si ritrovano le onde semplici permanenti [2].

[1] *Risoluzione dell'equazione funzionale che caratterizza le onde periodiche in un canale molto profondo* [Math. Ann., B. 85 (1922), pag. 256-279].

[2] In base alle esperienze di Poiseuille, relative all'acqua, si ha in unità C.G.S. (Brillouin, *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*, première partie, pag. 129)

$$\nu = \frac{0.01779}{1 + 0{,}0336793\,T + 0{,}0002209936\,T^2},$$

designando T la temperatura. Per l'acqua salata, la legge di variazione della viscosità col grado di salsedine è alquanto complessa; come norma generale si può asserire che la maggior parte dei sali disciolti nell'acqua aumentano la viscosità del liquido.

Astronomia. — *Sullo spostamento in longitudine di alcune macchie di Marte.* Nota di MENTORE MAGGINI, presentata dal Socio V. CERULLI.

In una mia Nota precedente ho riferito su alcune apparenze delle macchie di Marte occorse durante l'opposizione del 1922, consistenti nel pallore temporaneo e quasi generale delle regioni oscure chiamate *Mari*. Mi faccio ora a comunicare alcuni fatti, non meno curiosi, che scaturiscono dalla riduzione delle misure relative ai punti fondamentali della rete areografica da me eseguite a Catania.

Incominciai le osservazioni a metà di marzo e le prolungai fino a metà agosto, nel quale intervallo fu possibile effettuare 916 misure su 93 punti della superficie di Marte, ciascuna misura consistendo nella determinazione delle due coordinate areografiche latitudine e longitudine: fu sempre adoperato un micrometro di posizione Salmoiraghi con due viti ortogonali.

Riserbandomi di pubblicare altrove il catalogo completo delle coordinate ottenute, come pure la discussione sulle misure di latitudine, riferisco qui sul modo di comportarsi delle longitudini, da cui sembra emergere uno spostamento di alcune macchie del pianeta.

Molti fra i 93 punti scelti a fondamento della rete furono osservati in cinque presentazioni, ed ogni volta in due o tre sere, altri in quattro presentazioni, mancando quella del giugno, a causa del pallore delle macchie; l'error medio di una misura di longitudine ammonta a $\pm 1°,2$. Ora fra questi punti ve ne sono diversi, 33 in tutti, pei quali i singoli valori della longitudine, determinati in ciascuna presentazione, mostrarono un andamento regolare, crescente o decrescente, che non può pensarsi dovuto ad errori di osservazione o ad un'influenza della fase, di cui si è sempre tenuto conto nella riduzione delle misure. Il prospetto seguente contiene le longitudini concluse per ciascuno di questi punti ad ogni presentazione il cui ordine è:

I	Presentazione	1922	marzo 27-aprile 21
II	»	»	aprile 23-maggio 24
III	»	»	maggio 26-giugno 29
IV	»	»	luglio 1-agosto 7
V	»	»	agosto 8-agosto 18.

Numero	REGIONE	Latitudine	Longitudine				
			I	II	III	IV	V
1	Palude dell'Oxo	+ 8°	—	11.3	13.5	13.5	14.8
2	Punto più orientale della Terra di Pirra	— 20	—	33.3	31.1	26.6	27.2
3	Foce di Idaspe nel L. Niliaco	+ 29	—	34.8	34.0	31.8	30.5
4	Centro di Argira	— 50	40.6	38.0	—	37.5	31.4
5	Foce di Jamuna nel G. dell'Aurora	— 10	47.5	48.0	—	52 3	54.5
6	Fonte di Gioventù	— 3	60.9	61.3	—	63.5	65.5
7	Foce Sud di Ambrosia	— 50	91.7	88.9	90.5	85 8	85.9
8	« Ascuris Lacus »	+ 52	—	92.7	92.5	90.8	87.0
9	Foce del Fasi nel Golfo Aonio	— 45	115.8	115.3	115 5	112.4	108.0
10	Foce di Ebro nel M. delle Sirene	— 35	137.0	141.3	140.2	137.9	135.8
11	Lago Castorio	+ 55	153.4	148.3	146.5	145.3	135.9
12	Nodo Gordiano di Lowell	0	139.9	155.9	140.2	146.6	148.9
13	Golfo del Gorgone in M. d. Sirene	— 30	158.1	158.0	156 4	155 3	150.1
14	« Lacus Maricae »	0	154.2	158.7	—	165 7	165.4
15	Lago Ammonio	0	169.8	171.2	171.1	173.1	—
16	Golfo del Titano	— 18	167.9	167.5	172.0	173.3	171.1
17	Propontide	+ 53	181.1	177.1	178.3	174.7	169.8
18	Lago Stinfalide	+ 48	198 5	197.8	196.3	182.4	—
19	Lago Astartide	— 20	189.4	198.8	—	203 2	201.7
20	Lago di Ecate	+ 40	—	208.7	208.0	203.4	201.7
21	Lago Pambotide	+ 5	—	219.0	220.9	224.0	224.8
22	Lago di Morfeo	+ 40	—	228.5	230.6	225.6	223.2
23	Golfo del Ciclope	— 12	220.9	222.9	—	229.3	229.8
24	Lago Sitonio	+ 55	239.3	235 4	235.8	230.6	—
25	Piccola Sirte	0	263 8	264.3	265.7	269.0	—
26	Mare Adriatico	— 45	280.0	285.5	271.2	276.8	—
27	Fonte di Astabora	+ 23	293 1	300.1	—	308,1	—
28	« Deltoton Sinus »	0	304.0	305.3	305.9	307.9	—
29	Palude di Coloe	+ 45	310.6	304.3	305.0	302. 5	—
30	Lago di Yaone	— 30	324.9	319.8	—	312 2	—
31	Punto più australe della Noachide	— 55	347.1	336.6	340.2	340.8	—
32	Fonte Dirceo	+ 38	—	359.6	357.9	358.4	357.6
33	Punto più australe del Neudro	— 25	—	359.9	357.8	358.0	354.3

Come si vede, le longitudini determinate alle varie presentazioni hanno mostrato delle differenze che ammontano fino a 10° areografici, ossia una differenza di circa $^3/_4$ d'ora nei tempi dei passaggi al centro del disco; le regioni per cui si riscontra il più grande spostamento sul parallelo sono la Foce di Jamuna, il Lago Ammonio, il Lago Stinfalide, il Lago Astartide.

Se sopra una mappa areografica si segna il posto delle regioni del prospetto superiore e si indica con una freccia la direzione del loro spostamento, si rilevano i fatti seguenti:

1°) per circa i due terzi delle trentatre macchie la direzione dello spostamento è stata verso oriente, per l'altro terzo verso occidente;

2°) le tredici macchie per cui lo spostamento ha avuto luogo verso occidente (senso delle longitudini crescenti) sono tutte comprese in una zona di $\pm 20°$ di latitudine areografica;

3°) per le venti macchie rimanenti sembra che, specialmente nell'emisfero boreale, l'ammontare dello spostamento cresca al crescere della latitudine.

Differenze notevoli nelle coordinate delle macchie di Marte sono state riconosciute, in specie nelle latitudini, da varî osservatori. Le regioni in cui di preferenza ha luogo questo fenomeno corrispondono al margine boreale del Mare delle Sirene e del Cimmerio: ma anche nelle longitudini, in quella di Aryn, della Palude di Oxo, della Foce dell'Jamuna, il Pickering ed Jarry-Desloges poterono riconoscere, in varie opposizioni, un moto graduale verso occidente, d'accordo con quanto è risultato in quest'anno.

Le macchie che durante la presente opposizione hanno mostrato uno spostamento in longitudine sono distribuite con uniformità sulla superficie del pianeta; esse corrispondono di preferenza ai nuclei oscuri a cui fanno capo le linee, cioè ai cosidetti *Laghi* o *Paludi*, mentre le grandi insenature dei *Diaframmi*, se ne togliamo Aryn e qualche punto del Golfo dell'Aurora e del Mare delle Sirene, sembrano rimanere fisse. Sono questi *Diaframmi* invece che presentano la più grande instabilità nei loro margini nel senso delle latitudini.

Da una parte dunque, i margini del *Gran Diaframma* e le altre macchie della zona *torrida* tendono a spostare verso ovest (o verso nord ovest se vogliamo tener conto anche del moto in latitudine) gli estremi australi delle linee, dall'altra i *Laghi* della zona *temperata* ne spostano verso est i corrispondenti estremi. La fantasia può interpretare questi fatti nelle più svariate maniere, partendo dalle condizioni della meteorologia di Marte: noi non ne dedurremo altro che un argomento in favore della instabilità delle macchie del pianeta, nelle quali la distribuzione degli elementi chiari ed oscuri va soggetta a cambiamenti periodici che dipendono dalla posizione loro rispetto al Sole ed a noi.

Geologia. — *Rapporti tettonici tra il massiccio cristallino di Cima d'Asta e gli Altipiani Vicentini* [1]. Nota preventiva di RAMIRO FABIANI, presentata dal Corrisp. G. DAL PIAZ.

Il territorio che si stende a mezzodì del massiccio di Cima d'Asta tra il Brenta e l'Adige (monti Lessini e altipiani di Lavarone e dei Sette Comuni) costituisce un'unità tettonica con caratteri speciali derivanti in particolar modo dalla presenza di formazioni eruttive.

In tale ordine di circostanze ho già illustrato (1911, 1912, 1913) il distretto basaltico veronese-vicentino e in seguito quello delle formazioni eruttive triasiche, in prevalenza porfiritiche, della regione del Pasubio (1920). Da ultimo, come naturale completamento degli studî precedenti, ho esteso le ricerche nella zona nord dell'area accennata, cioè al margine degli Altipiani e alla Valsugana. La tettonica di tale zona si ricollega con l'esistenza del massiccio Cima d'Asta-Laitòn, formato di un'ossatura di masse intrusive (graniti e granodioriti), rivestite in parte da scisti cristallini coperti da una poderosa piastra di porfidi quarziferi, estremità sud delle grandi colate del Trentino centrale.

Salvo per alcuni tratti (es. tra la Val di Sella e la Val di Centa) o riguardo al riferimento cronologico o litologico di certe formazioni (es. Terziario in genere e rocce eruttive del versante destro della Valsugana), detta zona era in complesso abbastanza nota dal lato cartografico (carte geologiche di Negri, Trener, Vacek); non così da quello tettonico.

L'interpretazione tettonica infatti, specie della Valsugana, risultava finora solamente dalle vecchie sezioni del Suess (1868), del Mojsisovics (1879) e del Taramelli (1882) e da quelle più recenti, ma altrettanto arretrate come concezione, del Rothpletz (1894). Secondo tali interpretazioni la tettonica assai accidentata della Valsugana si riduceva a un sistema di faglie, concezione mantenuta anche in recenti lavori di sintesi sulla struttura tettonica della regione alpina condotti secondo le moderne teorie.

Nell'attesa di pubblicare il lavoro completo, riassumo ora i risultati più importanti ai quali potei giungere col sussidio anche dei miei precedenti studî nelle zone contigue:

La tettonica della regione tra la Cima d'Asta e la pianura vicentina deriva da una struttura a pieghe. La più intensa azione di corrugamento

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto geologico della R. Università di Padova.

si è manifestata nella Valsugana, dove il motivo tettonico si riassume in due sinclinali principali, più o meno rovesciate e profondamente deformate (talora strozzate) per compressioni e stiramenti, tra le quali si sviluppa un'anticlinale intaccata da pieghe secondarie, pure deformate e stirate (M. Lefre, Civaròn). Ne risulta un complesso sistema di pieghe-faglie, delle quali due principali, che indico col nome di « linea della Valsugana nord » (linea Valsugana-Comelico dei vecchi autori) e « linea della Valsugana sud » (linea di Belluno del Mojsisovics, la quale però, come dimostrò il Dal Piaz, non entra nel Bellunese).

Non esistono dunque nè le faglie vere e proprie, nè le faglie inverse (*Ueberschiebungen*), ammesse dagli autori che più specialmente illustrarono la regione.

Le caratteristiche tettoniche della Valsugana sono essenzialmente imputabili alla funzione d'ostacolo che nel corso del corrugamento ebbe la massa granitico-scistosa dell'Asta (con la piastra di porfidi quarziferi sovrastante); alcuni particolari sono dovuti alle intrusioni minori (porfiriti del M. Zaccòn).

Particolare importanza ha la linea della Valsugana nord, la quale lascia la Valsugana per proseguire ad ovest verso l'Adige, passando a nord di Trento (Monte Calisio). Questa linea segna il limite nord del distretto basaltico veneto, le cui manifestazioni più settentrionali sono spesso rappresentate da limburgiti anzichè da basalti ordinarî (es. a Porta Manazzo e a Pomarolo).

Altro carattere dell'area a sud di detta linea della Valsugana è la lacuna in corrispondenza del Carnico (gruppo S. Cassiano-Raibl), lacuna che per varie circostanze (es. natura delle brecce alla base della Dolomia principale), ritengo più che altro dovuta a trasgressione tettonica (scorrimento).

Il corrugamento che ha portato alle condizioni tettoniche presenti, sopra tutto al costipamento di pieghe e alle complicazioni per pieghe-faglie della Valsugana, è di data recente e certo posteriore al Tortoniano più alto, al quale spettano gli ultimi depositi marini esistenti in questa regione (cfr. Fabiani, *Il Terziario del Trentino*, 1922).

In relazione all'ipotesi sostenuta ad esempio dal Kober che la linea primaria segni il limite tra due falde di scorrimento del sistema dinarico, rilevo che nella Valsugana non si può parlare di vero e proprio scorrimento lungo questa linea, trattandosi semplicemente di un rovesciamento accompagnato da piega-faglia per riduzione e stiramento.

Lo studio delle rocce eruttive del M. Zaccòn e dei Dossi di Caldonazzo (attribuite nelle carte geol. rispettiv. di Trener e di Vacek a porfidi quarziferi permiani) mi ha dimostrato trattarsi di porfiriti più o meno quarzifere, così somiglianti a quelle intrusive triasiche (prewengeniane) del Vicentino (es. di Posina) da far ritenere che appartengano allo stesso centro eruttivo.

Dai rapporti di giacitura tra le masse intrusive porfiritiche e le altre rocce (evidentissimi ad es. nella laccolite del M. Alba, che ho illu-

strata ne *La regione del Pasubio*, pag. 65) si rileva che le intrusioni del Trias medio si spingono attraverso tutta la serie permiana e triasica fino alla base del Ladinico, dopo aver perforato per un notevole spessore (senza sconnessione della propria massa) le filladi quarzifere, che formano il basamento paleozoico del settore a sud della linea primaria della Valsugana e sono riportabili con probabilità, almeno in parte, al Carbonifero. Tale circostanza mostra che nel movimento da sud-est a nord ovest, al quale in una fase del corrugamento terziario risulta sia andata soggetta la regione, prese parte, solidalmente alla pila di strati dal Permiano al Trias medio, anche la massa delle filladi quarzifere, le quali dunque rispetto a un tale movimento non sono autoctone (1) Non può sfuggire l'importanza di questo fatto, tanto più se fosse constatato anche in altre regioni, in rapporto alla individuazione ed età di falde di carreggiamento del paese dinarico.

Batteriologia agraria. — *Sui bacilli radicali della Calendula officinalis L.*(2). Nota di R. Perotti e di G. Zaffuto, presentata dal Socio R. Pirotta.

Uno di noi ha già segnalato la presenza di bacilli nelle radici di numerose fanerogame non leguminose, e, fra queste, della *Calendula officinalis* L. (3).

Con la presente Nota riferiamo i risultati di una prima serie d'indagini, in particolar modo dirette alla conoscenza delle forme rinvenute nello spessore dello strato corticale di detta composita che dagli agricoltori è ritenuta miglioratrice del terreno

Isolamento. — Per l'isolamento dei bacilli ci siamo serviti del decotto di piante di *Calendula*, preparato con radici, foglie e fusti di essa, seccati all'aria, in proporzione di gr. 150 per 1000 di acqua di condottura.

L'ebullizione fu protratta per due ore, ed al liquido ancora caldo si aggiunsero gr. 20 di saccarosio; dopo di che venne filtrato, riportato a volume e sterilizzato a 120° C. per 20'. Una parte dello stesso liquido fu agarizzato all'1,5 % e neutralizzato.

(1) È superfluo rilevare che il blocco di tutte le formazioni dalle filladi quarzifere al Trias medio, sarebbe invece autoctono *relativamente* all'accennato scorrimento della piastra costituita dalla Dolomia Principale e dagli strati più recenti.

(2) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio di batteriologia agraria di Roma, annesso alla Stazione di patologia vegetale.

(3) Rend. Acc. Lincei, fasc. 10, 2° sem., 1922, pag. 484.

L'isolamento da un primo gruppo di campioni, provenienti da una unica località, si eseguì con il metodo delle culture a piatto con agar-calendula, in scatole di Petri e su becco di flauto. Non si sviluppò una sola forma di colonie, ma una fu prevalente, con i seguenti caratteri:

Morfologia. — Colonie grandi, subrotonde a margine intiero, leggermente sinuose, finemente punteggiate, di aspetto mucillaginoso, trasparente, rilevate, lenticolari, anucleate.

Quattro stipiti di esse si passarono su becco di flauto, ottenendosene da tutti uno sviluppo uniforme con aspetto di patina biancastra, semitrasparente, lobata, scolante nell'acqua di condensazione.

La forma è costituita di bacilli, leggermente allungati, che nel brodo-*Calendula* raggiungono le dimensioni medie di μ 1,8 × 1,00, mentre in brodo di fagioli ed in brodo di carne raggiungono dimensioni minori (μ 0,7 × 1,3). Su patata, le dimensioni raggiunte sono notevolmente maggiori: μ 2,4 3,5 × × 0,6-0,8. Sono mobili, si colorano bene con violetto di genziana, con fucsina e con il Graam; perdono questo dopo 3' in alcool.

Caratteri culturali. — In brodo di fagioli, come in quello di *Calendula*, il bacillo si sviluppa abbondantemente: il liquido resta mediocremente torbido, ma si sviluppa una notevole coperta che cade al fondo in leggeri fiocchi, ivi formando piccolo deposito. In brodo di carne lo sviluppo è mediocre e i medesimi caratteri sono alquanto attenuati.

Con il tempo, nei due primi strati aumentano l'intorbidamento del liquido e il deposito al fondo di esso, mentre la coperta diviene rossastra; nel brodo di carne lo sviluppo resta molto arretrato e non si nota alcuna colorazione. In alcuni stipiti dello stesso bacillo la coperta presentava solo riflessi rosa.

Su agar-fagioli e su quello di *Calendula* lo sviluppo fu molto abbondante, con caratteri simili: patina biancastra, semitrasparente, lobata, scolante al fondo nell'acqua di condensazione.

Su agar nutritivo al peptone, lo sviluppo, con gli stessi caratteri, fu molto abbondante.

Le colture in infissione in gelatina dettero leggera fluidificazione per alcuni stipiti; per altri invece la dettero più energica. Non si notò fluorescenza.

Su patate uno stipite si sviluppò con aspetto mucillagginoso e leggera colorazione rossastra su un'area limitata; un altro stipite si sviluppò sotto forma di patina grinzosa, senza colore, e su un'area estesa. Su carota lo sviluppo ebbe caratteri corrispondenti, ma in un nessun caso si ebbe colorazione.

Il latte, con entrambi gli stipiti, non coagulò nè si colorò.

Studio della nutrizione del bacillo in soluzioni a composizione controllabile. — Si preparò una soluzione minerale della seguente composizione: K_2HPO_4 gr. 1; $CaCl_2$ gr. 0,1; $MgSO_4$ gr. 0,3; NaCl gr. 0,1; $FeCl_3$ gr. 0,01; H_2O gr. 1000.

Con aggiunte di varie sorgenti di carbonio e di azoto, si allestirono in doppia prova tredici culture di due stipiti del bacillo, i cui substrati risultarono di questa composizione:

I. Soluzione minerale 100 + asparagina gr. 1;

II. » » 100 + asparagina gr. 1 + glucosio gr. 1;

III. » » 100 + asparagina gr. 1 + glicerina gr 1 + saccarosio gr. 0,5;

IV. » » 100 + nitrato potassico gr. 1 + glicerina gr. 1 + + saccarosio gr. 0,5;

V. » » 100 + nitrato potassico gr. 1 + glucosio gr. 1;

VI. » » 100 + nitrato potassico gr. 1 + glicerina gr. 0,5;

VII. » » 100 + cloruro ammonico gr. 1 + glucosio gr. 1;

VIII. » » 100 + cloruro ammonico gr. 1 + glicerina gr. 0,5 + + saccarosio gr. 0,5;

IX. » » 100 + tartrato ammonico gr. 1 + glicerina gr. 1 + + saccarosio gr. 0,5;

X. » » 100 + tartrato ammonico gr. 1 + glucosio gr. 1;

XI. » » 100 + lattato ammonico gr. 0,6 + asparagina gr. 0,4 + cloruro sodico gr. 0,4;

XII. » » 100 + lattato ammonico gr. 0,6 + aspartato sodico gr. 0,34 + glicerina gr. 0,35 + + cloruro sodico gr. 0,4;

XIII. » » 100 + nitrito potassico gr. 0,2 + soda gr. 0,2.

L'intensità di sviluppo di due stipiti del bacillo, in queste soluzioni, dopo dieci giorni, adottando una scala numerica da 0 a 5, risultò come segue:

Soluzione	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Stipite A	3	4,5	4	3,5	3	3,5	3
Stipite B	3	4,5	4	3	3	3,5	3

Soluzione	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
Stipite A	2,5	1	2	2,5	4,5	0
Stipite B	1	1	3	3,5	4	0

Da esso deducesi come le forme presentino un comportamento analogo e che la sorgente di azoto da esse preferita è quella organica, e precisamente amidica, in presenza di saccarosio e, meglio ancora, di glucosio.

I caratteri dello sviluppo si presentano simili a quelli già rilevati per le culture in brodo di fagioli, e persiste caratteristica la formazione di pigmento roseo, notevolmente più abbondante per lo stipite A in confronto a quello B, specialmente nei liquidi contenenti asparagina e glucosio.

Studio della specie in rapporto alle funzioni microbiochimiche del suolo. — La prova del potere ammonizzante dei due primi stipiti isolati fu eseguita in cm^3. 20 di soluzione acquosa di peptone Witte al 10 %; quella del potere nitrificante, in cm^3. 25 di una soluzione acquosa nitrificabile, costituita di $(NH_4)_2SO_4$ e K_2HPO_4 al 2 %, con aggiunta di gr. 1,00 di $MgCO_3$; quella del potere di denitrificazione, in cm^3. 50 di soluzione Giltay; quella del potere di assimilazione dell'azoto, in cm^3. 250 di una soluzione acquosa di mannite al 20 ‰ e 2 % di K_2HPO_4 in presenza di creta. Nell'acqua di peptone si ottenne un leggero sviluppo di azoto ammoniacale. Nella soluzione nitrificabile, nessuna formazione di nitrati in quella di Giltay; si ottenne soltanto un leggero sviluppo; e nel liquido culturale, privo di azoto, mancò totalmente lo sviluppo.

Estensione dei risultati. — Un'ultima serie di ricerche fu istituita per stabilire, con numerosi campioni di diversa provenienza, se nelle radici della *Calendula* si rinvenissero altre specie batteriche ed eventualmente, tra queste, forme capaci di utilizzare decisamente l'azoto elementare, cambiando anche metodo di ricerca.

Dai campioni, nuovamente prelevati, vennero ancora isolate otto colonie di microrganismi, delle quali, due con caratteri corrispondenti a quelli degli stipiti già studiati; due altre appartenenti a cromogeni del terreno e le altre quattro a forme tra di loro affini che assumevano con il tempo, su agar-*Calendula* e altri substrati magri, sviluppo molto esteso ed imbrunimento, nonchè altri caratteri macroscopici proprî degli oligonitrofili. Si trattava di cocco-bacilli non fluidificanti. Di queste forme fu eseguito un esame sommario, particolarmente in relazione alla capacità di fissazione dell'azoto.

Da almeno due di esse, coltivate in soluzione di mannite Beyerinck, si ottenne un modesto guadagno di azoto nelle culture; ma, allo stato delle nostre ricerche, non vogliamo annettere, a questo risultato, grande importanza.

Ripetemmo le prove sul potere di assimilazione dell'azoto delle stesse forme in acqua di patate al 0,1 ‰ di K_2HPO_4 secondo la formula di H. Fischer [1], e per il momento possiamo riferire soltanto che dette forme si svilupparono abbondantissimamente ed ebbero comportamento oligonitrofilo.

[1] C. f. B. II Abt., Bd. 55 h 1/4, pag. 2.

Conclusioni.

Riassumiamo dunque il nostro lavoro, affermando:

1°) che nello strato corticale della *Calendula officinalis* L. si rinvengono normalmente batterî;

2°) che questi non appartengono ad un'unica specie o, quanto meno, sono da attribuirsi a differenti « razze ». Alcuni stipiti appartengono a specie banali del terreno;

3°) che la diversità dei caratteri delle forme lascia presumere particolari adattamenti graduali di esse al singolare ambiente radicale (*istosfera*) [1];

4°) che alcuno di esse risultano possedere i caratteri degli oligonitrofili.

[1] Rend. Acc. Lincei, vol. XXV, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 5°-6°, pag. 233.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 gennaio 1923.

Berlese A. — Considerazioni sulla evoluzione degli organismi (Estr. dal « Redia », vol. XV, pp. 115-175). Firenze, 1922. 8°.

Caterini F. — Ancora sul polimorfismo della *Terebratula* (Pygope) *Aspasia* Meneghini (Estr. dai « Processi verbali della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXIX). Pisa, 1920. 8°, pp. 1-8.

Caterini F. — Cenni geologici sulla media valle del Rio Guappero sul Monte Pisano (Estr dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXXIV). Pisa, 1921. 8°, pp. 1-13.

Caterini F. — Due parole sulla grotta di Parignana e sui fossili rinvenuti in essa (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », Processi verbali, vol. XXXI). Pisa, 1921. 8°, pp. 1-5.

Caterini F. — Resti di *Rhinoceros Etruscus* Falc. rinvenuti a Montefoscoli (Val d'Era) (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », Processi verbali, vol. XXXI). Pisa, 1922. 8°, pp. 1-7.

Caterini F. — Resti fossili di uccelli della breccia ossifera del Monte Argentario e del deposito quaternario dell'isola di Pianosa (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », Processi verbali, vol. XXX). Pisa, 1919. 8°, pp. 1-6.

Caterini F. — Rinvenimento di terreni terziari non marini in una località del Volterrano (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », Processi verbali, vol. XXXI). Pisa, 1922. 8°, pp. 1-3.

Guidi C. — Appendice alla statica delle dighe per laghi artificiali. Torino, 1921. 8°, pp. 1-7.

Guidi C. — Pali in acciaio-beton centrifugati (Estr. dalla Rivista tecnica mensile « L'Ingegneria », n. 2). Milano, 1922. 4°, pp. 1-7.

Guidi C. — Sulle scuole d'ingegneria (Estr. dalla Rivista tecnica mensile « L'Ingegneria », anno I). Milano, 1922. 8°, pp. 1-7.

Helm A. — Ueber die Gipfelflur der Alpen [Sonderabdr. aus der « Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich », LXVII (1922), pp. 45-66]. Zurich, 1922. 8°.

Ivaldi G. — Sui risultati sperimentali relativi all'impiego del vapore ad alte pressioni ed alte temperature e sulle loro conseguenze (Estr. da « L'Industria », vol. XXXVI). Milano, 1922, 8°, pp. 1-15.

Longo B. — La *Chamaerops humilis* L. a. Populonia (Estr. dal « Bollettino della Società Botanica Italiana », n. VIII). s. l., s. d. 8°.

Merwin H. E. — Augite and Hornblende from Kilimanjaro (Repr. from the « American Mineralogist », vol. VII, pp. 121-125). Washington, 1922. 8°.

Monti M. — Il mercato mondiale del petrolio dal 1900 ad oggi (Estr. dai « Nuovi Annali del Ministero per l'Agricoltura », anno II, pp 645-846). Roma, 1922, 8°.

Paoli G. — La moltiplicazioae dell'endofago della Bianca-rossa in Italia (Estr. dal « Coltivatore », n. XXXIII). Casale Monferrato, 1922. 8°, pp. 1-5.

Pession G. — Un apparecchio di registrazione automatica dei segnali radiotelegrafici (Estr. dal giornale « L'Elettrotecnica », n. 29). Varese, 1922. 8°, pp. 1-4.

Platania G. — La cristallizzazione del magma basaltico di Aci Castello. Catania, 1922. 8°, pp. 1-17.

Platania G. — L'esplosione dello Stromboli del maggio 1919. Catania, 1922. 8°, pp. 1-18.

Platania G. — Origine dei terrazzi dell'Etna. Catania, 1922. 8°, pp. 1-11.

Platania G. — Su di una lava a riebeckite dell'Etna. Catania, 1922. 8°, pp. 1-10.

Platania G. — Sul periodo sismico del novembre 1919 presso Acireale. Catania, 1922. 8°, pp. 1-8.

Platania G. — Terremoto di Codavolpe (Etna) del settembre 1920. Catania, 1922. 8°, pp. 1-8.

Pucini E. — Alcune considerazioni sulla cosiddetta « Pioggia fossile » (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », Mem., vol. XXXV). Pisa, 1922. 8°, pp. 1-22.

Schatzmayr A. — Gli Apion (Erythrapion) italiani (Estr. dal « Redia », vol. XV, pp. 106 113). Firenze, 1922. 8°.

Sismonda A. — In ricordo di Angelo Sismonda. Lettere raccolte da *A. Raccati*. Torino, 1222. 8°. pp. 1-117.

Sordinas J. — La lutte contre la mouche de l'olive à Corfou (Estr. dal « Redia », vol. XV, pp. 97-103). Firenze, 1922. 8°.

Versari R. — Ricerche di morfologia (vol. II). Roma, 1921-22. 8°, pp. 1-306.

Washington H. S. — A worked jade pebble from Copan (Repr. from « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. XII, pp 387-391). Washington, 1922. 8°.

Washington H. S. — Augite and Hornblende from Kilimanjaro (Repr. from the « American Mineralogist », volume VII, pp. 121-125). Washington, 1922. 8°.

Washington H. S. — Isostasy and rock density (Repr. from « Bulletin of the Geological Society of America », volume XXXIII, pp. 375-410). Washington, 1922. 8°.

Washington H. S. — Nephrite celt from Bahia, Brazil (Repr. from the « Pan-American Geologist », vol. XXXVII, pp. 197 202). Washington, 1922. 8°.

Washington H. S. — The average chemical composition of igneous rocks (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. VIII, pp. 108-115). Washington, 1922. 8°.

Washington H. S. — The Jades of middle America (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». vol. VIII, pp. 319-326). Washington, 1922. 8°.